Exercice 1

$A_n = \sum_{k=0}^{n-1}(2^k+6k+7n-1) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k + 6\sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 7n-1 = 2^n - 1 + 6\dfrac{(n-1)n}{2} + (7n-1)n = 2^n + 2n\,(5n-2)$

$B_n = \sum_{i=1}^{999\ 999}(\sqrt{i+1}-\sqrt{i}) = \sum_{i=1}^{999\ 999}\sqrt{i+1} - \sum_{i=1}^{999\ 999}\sqrt{i}.$

Dans la première somme, on effectue le changement de variable $l = i+1$. $\left\{\begin{array}{c} i = 999\ 999 \to l = 1\ 000\ 000 \\ i = 1 \to l = 2 \end{array}\right.$

$B_n = \sum_{i=2}^{1\ 000\ 000}\sqrt{i} - \sum_{i=1}^{999\ 999}\sqrt{i} = \sqrt{1\ 000\ 000} + \sum_{i=2}^{999\ 999}\sqrt{i} - (\sqrt{1} + \sum_{i=2}^{999\ 999}\sqrt{i}) = 1\ 000 - 1 = 999$

$C_n = \sum_{p=3}^{n} 4(-1)^p 5^{3p+2} = 4\times 5^2 \sum_{p=3}^{n}(-1)^p(5^3)^p = 4\times 5^2\sum_{p=3}^{n}(-5^3)^p = 4\times 5^2((-5^3)^3 + .. + (-5^3)^n)$

$C_n = 4\times 5^2\times(-5^3)^3(1+..+(-5^3)^{n-3}) = -4\times 5^{11}\dfrac{(-5^3)^{n-2}-1}{(-5^3)-1} = 4\times 5^{11}\dfrac{(-1)^{n-2}5^{3n-6}-1}{5^3+1}$

Exercice 2

Posons $(\mathcal{H}_n)$: $\sum_{i=2}^{n} i\times 2^i = 2^{n+1}(n-1)$.

Initialisation : $n = 2$,

$$\left.\begin{array}{c} \sum_{i=2}^{n} i\times 2^i = \sum_{i=2}^{2} i\times 2^i = 2\times 2^2 = 8 \\ 2^{n+1}(n-1) = 2^{2+1}(2-1) = 8 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{i=2}^{n} i\times 2^i = 2^{n+1}(n-1) \text{ si } n=2 \text{ donc } (\mathcal{H}_2) \text{ est vraie.}$$

Hérédité : supposons $(\mathcal{H}_n)$ est vraie.

$\sum_{i=2}^{n+1} i\times 2^i = (n+1)2^{n+1} + \sum_{i=2}^{n} i\times 2^i = (n+1)2^{n+1} + 2^{n+1}(n-1)$ (d'après $(\mathcal{H}_n)$) $= 2^{n+1}\times(2n) = 2^{n+2}n = 2^{(n+1)+1}[(n+1)-1]$ donc $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 2$, $\sum_{i=2}^{n} i\times 2^i = 2^{n+1}(n-1)$.

Exercice 3

$$\frac{(n+2)!}{(n+1)!} = \frac{(n+2)\times(n+1)\times..2\times 1}{(n+1)\times..\times 2\times 1} = n+2$$

Posons $(\mathcal{H}_n)$: $\sum_{k=1}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

Initialisation $n = 1$,

$$\left.\begin{array}{c} \sum_{k=1}^{n} k! = 1! = 1 \\ (n+1)! = 2! = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} k! \leqslant (n+1)! \text{ quand } n=1 \text{ donc } (\mathcal{H}_2) \text{ est vraie.}$$

Hérédité supposons $(\mathcal{H}_n)$ est vraie.

$\sum_{k=1}^{n+1} k! = (n+1)! + \sum_{k=1}^{n} k! \leqslant (n+1)! + (n+1)! = 2\times(n+1)!$ (d'après $(\mathcal{H}_n)$) $\leqslant (n+2)\times(n+1)! = (n+2)!$

donc $\sum_{k=1}^{n+1} k! \leqslant (n+2)!$ ce qui implique que $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie.

Conclusion : pour tout entier $n \geqslant 2$, $\sum_{k=1}^{n} k! \leqslant (n+1)!$

Exercice 4

1. (a) On choisit deux boules parmi 15 de façon ordonnée donc il y a A_{15}^2 possibilités

   i. On choisit une blanche parmi les 5 puis une noire parmi les 10 donc il y a 5×10 possibilités

   ii. On choisit l'une des deux couleurs qui apparait en premier ensuite on choisit en premier la boule de la couleur sélectionnée puis une boule de l'autre couleur ce qui nous donne $2\times 5\times 10$ possibilités.

   (a) On choisit cinq boules parmi 15 de façon ordonnée donv il y a A_{15}^5 possibilités

   (b) Puisque les évènements "obtenir une blanche" et "obtenir une noire " sont incompatibles, on se ramène à la pioche ordonnée de deux boules blanches puis de trois boules noires. Donc il y a $A_5^2\times A_{15}^3$ possibilités

Exercice 5

```
programm ds;
uses crt;
var n, m, a : integer;
var b : real;
begin
writeln ('donner n');
readln(n);
writeln ('donner m');
readln(m);
a := n + m;
b := sin(n × m);
writeln ('les nombres obtenus sont a =', a,' et b =', b);
repeat until keypressed :
end.
```

Problème 6

1. (a) Un tirage correspond à une 3−liste d'une ensemble à 3 éléments. Par conséquent, le nombre de tirages est 3^3.
   (b) Dans ce cas chaque n° apparait exactement une fois. Un tirage correspond ainsi à une permutation d'un ensemble à 3 éléments et par suite le nombre de tirage est 3!.
2. Dans ce cas un n° apparait 2 fois et les autres une fois. On choisit un n° parmi les 3. On lui associe 2 lancers parmi les 4 possibles. Le tirage constitué des deux lancers restants correspond à une permutation d'un ensemble à 2 éléments. Par conséquent, le nombre de tirages est $C_3^1 \times C_4^2 \times 2!$.
3. Un tirage correspond à une n-liste d'un ensemble à 3 éléments donc il y a 3^n tirages possibles
   (a) Le numéro i n'apparait pas durant les n lancers donc un tirage correspond à une n-liste de l'ensemble des deux numéros différents de i. Par conséquent $card(A_i) = 2^n$.
   (b) Dans chaque tirage de$A_i \bigcap A_j$ les n° i et j n'apparaissent pas durant les n lancers. Ainsi chacun d'entre eux correspond une n−liste à 1 éléments ($3 - 2 = 1$). Donc $Card(A_i \bigcap A_j) = 1^n = 1$.
   (c) Dans chaque tirage de$A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3$ les n° $1, 2$ et 3 n'apparaissent pas durant les n lancers donc $A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 = \varnothing$ et $card(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3) = 0$.
   (d) On applique la formule du crible.
   $Card(A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3) = \sum\limits_{i=1}^{3} Card(A_i) - \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 3} Card(A_i \bigcap A_j) + Card(A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3) = 3 \times 2^n - 3 = 3(2^n - 1)$
4. Il correspond à ce qu'au moins un n° n'est pas obtenu. Son contraire est que tous les n° sont obtenus au moins une fois : il y a donc $3^n - 3(2^n - 1)$ tels tirages.

Problème 7

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = (x + 1 - x)^n = 1^n$ donc $\sum\limits_{k=10}^{n-1} C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-k} = 1$.
   En remplaçant n par $n-1$ puis par $n-2$, on en déduit que $\sum\limits_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-1-k} = \sum\limits_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k x^k (1-x)^{n-2-k} = 1$
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = n \sum\limits_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k}$. On pose $j = k-1 \Leftrightarrow k = j+1$ $\left\{ \begin{array}{c} k = n \to j = n-1 \\ k = 1 \to j = 0 \end{array} \right.$
   donc $\sum\limits_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = n \sum\limits_{k=10}^{n-1} C_{n-1}^k x^{k+1} (1-x)^{n-1-k} = nx \sum\limits_{k=10}^{n-1} C_{n-1}^k x^k (1-x)^{n-1-k} = nx$
   (a) $$\left. \begin{array}{r} kC_n^k = k\dfrac{n(n-1)..(n-k+1)}{k!} = k\dfrac{n(n-1)..(n-k+1)}{k \times (k-1)!} = \dfrac{n(n-1)..(n-k+1)}{(k-1)!} \\ nC_{n-1}^{k-1} = n\dfrac{(n-1)..(n-1-(k-1)+1)}{(k-1)!} = n\dfrac{(n-1)..(n-k+1)}{(k-1)!} \end{array} \right\} \Rightarrow kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$$
   (b) $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \sum\limits_{k=1}^{n} nC_{n-1}^{k-1} x^k (1-x)^{n-k} = nx$ donc
   $\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 0 \times C_n^0 x^0 (1-x)^{n-0} + \sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k = nx$.

Exercice 8

1. (a) $(k-1)C_{n-1}^{k-1} = (n-1)C_{n-2}^{k-2}$ donc $k(k-1)C_n^k = (k-1)(kC_n^k) = (k-1) \times n \times C_{n-1}^{k-1} = n \times (k-1)C_{n-1}^{k-1} = n(n-1)C_{n-2}^{k-2}$
   (b) $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1) \sum\limits_{k=2}^{n} C_{n-2}^{k-2} x^k (1-x)^{n-k}$.
   On effectue le changement de variable $j = k-2 \Leftrightarrow k = j+2$ $\left\{ \begin{array}{c} k = n \to j = n-2 \\ k = 2 \to j = 0 \end{array} \right.$
   donc on a
   $\sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1) \sum\limits_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k x^{k+2} (1-x)^{n-2-k} = n(n-1)x^2 \sum\limits_{k=0}^{n-2} C_{n-2}^k x^k (1 -$

$x)^{n-2-k} = n(n-1)x^2$

$\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = 0 + 0 + \sum\limits_{k=2}^{n} k(k-1)C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2$

(c) $\sum\limits_{k=0}^{n} k(k-1)C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k} - \sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k x^k(1-x)^{n-k}$ donc on a $n(n-1)x^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k} - nx$ d'où $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 + nx$

2. $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 C_n^k - (\sum\limits_{k=0}^{n} kC_n^k)^2 = n(n-1)x^2 + nx - (nx)^2 = -nx^2 + nx = nx(1-x)$