
La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 4 pages et de quatre exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 4h

Bonne chance

Exercice 1

On considère les deux suites a et b définies par

$$a_{n+1} = a_n^{\frac{2}{5}} b_n^{\frac{3}{5}} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = a_n^{\frac{3}{5}} b_n^{\frac{2}{5}}$$

On suppose $b_0 > a_0 > 0$.
On admet que $\forall n \geqslant 0$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$.
On définit alors deux suites u et v données par $u_n = \ln a_n$ et $v_n = \ln b_n$.
Par conséquent, ces deux suites satisfont à

$$\forall n \geqslant 0, u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{3}{5}v_n.$$

1. On pose $t_n = u_n - v_n$.
   (a) Montrer que t est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (b) Exprimer t_n en fonction de n et de t_0.
   (c) En déduire que $\forall n \geqslant 0$, $u_n < v_n$ et déterminer la limite de la suite $(u_n - v_n)_{n \geqslant 0}$.
2. Etudier la monotonie de u et de v.
3.
   (a) Montrer que les suites u et v convergent vers une limite commune l.
   (b) Montrer que les suites a et b convergent vers une limite commune L strictement positive.
4.
   (a) Montrer que la suite $w_n = a_n b_n$ est constante.
   (b) En déduire que $L = \sqrt{a_0 b_0}$.

Exercice 2

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par $\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^{-x}}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 2 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

On définit également la fonction h, définie sur $\mathbb{R}$, par $\quad h(x) = x - \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

Etude de la fonction h.

1. La fonction h possède-t-elle une parité ?
2. Jusitifier que la fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $h'(x) = \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
4. Dresser le tableau de variation de h (on calculera $h(0)$ et on précisera les limites aux bornes).. En déduire le signe de h.
5. Quelle est l'asymptote de la courbe représentative de h en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Etude de la fonction f

1. Montrer que la fonction f est continue en 0.
2. Montrer qu'elle est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^\times$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{(e^x + e^{-x})}{x^2} h(x)$
4. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$ et déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
5. Déterminer la limite de $f'(x)$ lorsque x tend vers 0.
   La fonction f' est -elle continue en 0 ?
6. Montrer que f' est une fonction continue sur $\mathbb{R}^\times$.

Exercice 3

Soit u la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+u_n}{2}}$ avec $u_0 \in [0,1]$.
On se propose d'étudier la suite u par deux méthodes.

1. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, u_n existe et appartient à $[0,1]$.
2. **Première méthode**

   (a) Résoudre l'inéquation $\dfrac{1}{4 \times \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}} \leqslant 1$..

   (b) Montrer que $\sqrt{\dfrac{1+x}{2}} \geqslant x$ lorsque $x \in [0,1]$ et préciser le ou les cas d'égalité.

   (c) En déduire que la suite u est monotone et préciser sa monotonie.
   (Indication : on pourra considérer l'inégalité précédente avec $x = u_n$).

   (d) Montrer que la suite u converge et déterminer sa limite.

3. **Deuxième méthode**

   (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

   $$1 - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{1+\sqrt{\dfrac{1}{2}}}(1-u_n)$$

   (b) Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $1 - u_n \leqslant (\dfrac{1}{1+\sqrt{\dfrac{1}{2}}})^n(1-u_0)$.

   (c) En déduire que la suite u converge et déterminer sa limite.

4. Ecrire un programme en Turbo Pascal qui calcule et affiche la valeur de
   $(\dfrac{1}{1+\sqrt{\dfrac{1}{2}}})^n(1-u_0)$ pour une valeur de u_0 réelle et de n entier supérieur ou égal à 0, entrées par l'utilisateur.

Exercice 4

Préliminaire

Soit (x_n) une suite numérique qui vérifie, pour tout entier naturel n, la relation :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$

(On exprimera x_n en fonction de n et on donne: $\dfrac{1+\sqrt{13}}{6} = 0{,}77$ à 10^{-2} près par excès et $\dfrac{1-\sqrt{13}}{6} = -0{,}44$ à 10^{-2} près par défaut).

a et b sont deux réels supérieurs ou égaux à 1.

On étudie la suite numérique (u_n) définie par : $u_0 = a \quad u_1 = b$ et pour tout entier naturel n:

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

Question 1

1.a : Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et vérifie : $u_n \geqslant 1$.
On considérera une récurrence de la forme
$\mathcal{R}_n$: u_n et u_{n+1} sont bien définis et vérifient : $1 \leqslant u_n$ et $1 \leqslant u_{n+1}$

1.b : Montrer que la seule limite possible de la suite (u_n) est 4.

Question 2

On se propose d'établir la convergence de la suite (u_n) par l'étude d'une suite auxiliaire (v_n) définie, pour tout entier naturel n par:

$$v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$$

2.a : Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$

2.b : Vérifier, pour tout entier n: $v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$. (on pensera à exprimer u en fonction de v)
En déduire que : $|v_{n+2}| \leq \dfrac{1}{3}(|v_n| + |v_{n+1}|)$.
(on pourra utiliser avec profit l'inégalité triangulaire $|x + y| \leqslant |x| + |y|$)

2.c : On note (x_n) la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et pour tout entier naturel n :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

Montrer que, pour tout entier naturel n, $|v_n| \leq x_n$ et conclure quant à la convergence de la suite (u_n).
(Indication : poser comme récurrence :$\mathcal{C}_n$: $|v_n| \leq x_n$ et $|v_{n+1}| \leq x_{n+1}$