

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 3 pages et de quatres exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.

Durée du devoir : 4h

Bonne chance

EXERCICE I (EML 1996)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$

1. (a) Justifier que f est C^1 sur $\mathbb{R}$ et etudier les variations de f .
- (b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ℓ .
- (c) Justifier que : $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$

Données numériques : $e^{1/2} \simeq 1.65 \pm 10^{-2}$ et $e \simeq 2.72 \pm 10^{-2}$

- (d) Montrer que pour tout réel x positif : $0 \leq |f'(x)| \leq f(x)$ puis que $f(x) \leq \frac{1}{2}$.

En déduire que $\forall x \geq 0, \quad |f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

- (e) Vérifier que $f\left(\left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \subset \left[0, \frac{1}{2}\right]$

2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par:

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$
- (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell| \quad \text{puis que} \quad |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

- (c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ .

EXERCICE II (ESCP 1990)

Soit f la fonction numérique définie sur $[0, +\infty[$ par la relation : $f(t) = \ln(1+t) + \frac{t^2}{1+t^2}$.

1. (a) Étudier les variations de f

(On n'hésitera pas à écrire $f'(t)$ sous la forme $\frac{A(t)}{(1+t)(1+t^2)^2}$)

- (b) Déterminer la limite du rapport $\frac{f(t)}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$.
Tracer la courbe représentative de f .

2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'équation : $(E_n) : f(t) = \frac{1}{n}$

- (a) Montrer que l'équation (E_n) admet une solution α_n et une seule.
(b) Déterminer le sens de variation puis expliciter la limite de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
(c) Déterminer la limite du rapport $\frac{f(t)}{t}$ lorsque t tend vers 0 par valeurs strictement positives.

En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f(\alpha_n)}{\alpha_n}$ puis la limite de la suite $(n\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

EXERCICE III (EDHEC 2004)

Dans ce problème, la lettre n désigne un entier naturel non nul.

On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x) = x^2 \exp(-\frac{n^2}{x^2})$ si $x \neq 0$ et $f_n(0) = 0$.

1. (a) Montrer que f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^\times$ et expliciter $f'_n(x)$
(b) Justifier que f_n est continue en 0.
(c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \exp(-\frac{n^2}{x^2}) \right]$
(d) Montrer que la fonction f_n est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Pour tout réel x non nul, calculer $f'_n(x)$ puis étudier son signe
(b) Calculer les limites de f_n en $+\infty$ et $-\infty$ puis donner le tableau de variation de f_n .
3. (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 de e^u lorsque u est au voisinage de 0.
(b) En déduire que, lorsque x est au voisinage de $+\infty$ ou au voisinage de $-\infty$, on a :

$$f_n(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{=} x^2 - n^2 + \frac{n^4}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

- (c) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, ainsi qu'au voisinage de $-\infty$, (C_n) admet une asymptote "oblique" (D_n) dont on donnera une équation.
4. (a) Montrer qu'il existe un unique réel strictement positif, que l'on notera u_n , tel que $f_n(u_n) = 1$.
(b) Vérifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^\times$, u_n est strictement supérieur à 1
(c) Montrer que pour $n \geq 2$, $u_n \geq \frac{n}{\sqrt{2 \ln n}}$ et en déduire la limite de la suite u_n .
(d) Justifier que u_n est solution de l'équation $(F_n) : 2x^2 \ln x = n^2$
(e) Justifier la relation $2 \ln u_n + \ln(\ln u_n) + \ln 2 = 2 \ln n$, puis montrer que $\ln u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.
En déduire, à l'aide de la question précédente, un équivalent de u_n lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

EXERCICE IV (Ecricome 1996 adapté)

On dispose de deux urnes A et B : initialement l'urne A contient N boules noires tandis que l'urne B contient N boules blanches, avec $N \geq 2$. On y effectue une suite d'épreuves, chaque épreuve étant réalisée de la façon suivante :

On tire au hasard une boule dans chacune des deux urnes, la boule tirée de l'urne A est mise dans B, celle tirée de B est mise dans A.

On appelle Y_k la variable aléatoire égale au nombre de boules noires présentes dans l'urne A à l'issue de la $k^{\text{ième}}$ épreuve et l'on pose $Z_k = Y_{k-1} - Y_k$, pour k entier naturel non nul, avec la convention $Y_0 = N$.

On remarquera que Z_k représente la différence algébrique de boules noires dans l'urne A entre la fin de la $(k-1)^{\text{ième}}$ épreuve et la $k^{\text{ième}}$ épreuve

Partie 1 : Etude du cas particulier $N = 2$

Ainsi, la variable Y_k prend ses valeurs dans $\{0, 1, 2\}$.

On pose $a_k = P(Y_k = 0)$, $b_k = P(Y_k = 1)$ et $c_k = P(Y_k = 2)$. En particulier, $a_0 = 0$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 1$.

- Déterminer la loi de Y_1
- Calculer les neuf probabilités conditionnelles $P_{(Y_k=j)}(Y_{k+1} = i)$ lorsque $i \in \{0, 1, 2\}$ et $j \in \{0, 1, 2\}$ (*c'est-à-dire, calculer $P_{(Y_k=0)}(Y_{k+1} = 0)$, $P_{(Y_k=0)}(Y_{k+1} = 1)$, etc. et on justifiera rapidement les calculs*)
- Exprimer a_{k+1} en fonction de a_k, b_k et c_k . Faire de même avec b_{k+1} et c_{k+1} .
- Explicitation des suites $(a_k)_k$, $(b_k)_k$ et $(c_k)_k$.
 - Que vaut $a_k + b_k + c_k$? En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}$, $b_{k+1} = 1 - \frac{1}{2}b_k$.
 - Exprimer b_k en fonction de k puis a_{k+1} et c_{k+1} en fonction de k . En déduire l'expression de a_k et b_k lorsque $k \in \mathbb{N}^\times$.
- Montrer que l'espérance $E(Y_k)$ de la variable Y_k est constante.
- Calculer la variance $V(Y_k)$ de la variable Y_k en fonction de k et sa limite quand k tend vers $+\infty$.
- Etude de la loi de Z_k lorsque $k \geq 1$.
 - Déterminer $Z_k(\Omega)$.
 - Quelle est l'espérance de Z_k ?
 - Donner la loi de Z_k .

Partie 2 : Etude de $E(Y_k)$ et $E(Z_k)$ lorsque $N = 5$

- Justifier que $Z_k(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$. Calculer les probabilités conditionnelles :

$$P(Z_k = 1/Y_{k-1} = j) \text{ et } P(Z_k = -1/Y_{k-1} = j)$$
 pour $j \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$ et $k \in \mathbb{N}^\times$.
- En appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Y_{k-1} = 0), (Y_{k-1} = 1), \dots, (Y_{k-1} = 5)$, exprimer $P(Z_k = 1)$ et $P(Z_k = -1)$ en fonction des probabilités $P(Y_{k-1} = 0), P(Y_{k-1} = 1), \dots, P(Y_{k-1} = 5)$.
- En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}^\times$, $E(Z_k) = \frac{2}{5}E(Y_{k-1}) - 1$.
- Justifier alors que la suite $(E(Y_k))_k$ est arithmético-géométrique.
- Donner l'expression de $E(Y_k)$ et de $E(Z_k)$ en fonction de k .
- Montrer que les suites $(E(Y_k))_{k \in \mathbb{N}^\times}$ et $(E(Z_k))_{k \in \mathbb{N}^\times}$ sont convergentes et donner leur limite quand k tend vers $+\infty$.