La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document ni d'AUCUNE DISCUSSION sous peine d'annulation de leurs copies; seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints.

Le devoir est composé de 3 pages et de sept exercices indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre souhaité par le candidat.
Durée du devoir : 4h

Bonne chance

EXERCICE 1 (ECRICOME 2005, extrait)

On considère, pour tout entier naturel n, l'intégrale : $I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x} dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Étudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n.
4. Qu'en déduit-on pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. Majorer la fonction $g : x \mapsto e^{-2x}$ sur $[0;1]$.
6. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
7. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
8. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1-(n+1)I_n$.
9. Calculer la limite de la suite $((n+1)I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
10. Déterminer la limite de la suite $((n+2)\left[1-(n+1)I_n\right])_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 2 (EML 1989, extrait)

Soit f définie sur $[0,2[$ par $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2-x}}$.

1. (a) Déterminer la monotonie de la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{2-x}$ sur $[0,2[$. En déduire celle de f sur $[0,2[$.
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = x$.
   (c) Démontrer : $\forall x \in [0,2[, \quad f(x) \geqslant x$ (*indication : résoudre algébriquement cette inéquation*).
2. On considère la suite u définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 \in [0,1]$.
   (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,1]$.
   (b) Prouver que u est croissante.
   (c) Démontrer que u converge et calculer sa limite.

EXERCICE 3 (ECRICOME 2005, extrait)

On considère la fonction φ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \varphi(x) = \dfrac{2}{x} + \ln(x)$

On définit la suite (u_n) par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$

1. Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^\times$.
2. On donne $\varphi\left(\dfrac{3}{2}\right) \simeq 1,73$ et $\varphi(2) \simeq 1,69$. Montrer que $\varphi\left(\left[\dfrac{3}{2};2\right]\right) \subset \left[\dfrac{3}{2};2\right]$.
3. En étudiant les variations de φ', montrer que : $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2};2\right], \quad |\varphi'(x)| \leqslant \dfrac{2}{9}$.
4. Montrer l'équation $\varphi(x) = x$ admet une et une seule solution sur $\mathbb{R}_+^\times$.
   On note x_1 cette solution. A l'aide des données numériques de la question 2, montrer que $x_1 \in \left[\dfrac{3}{2};2\right]$.
5. Montrer successivement que pour tout entier n :
$$\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2 \quad ; \quad |u_{n+1} - x_1| \leqslant \frac{2}{9}|u_n - x_1| \quad ; \quad |u_n - x_1| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n.$$
6. En déduire la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 (EML 1992, modifié)

Une urne contient une boule blanche, une boule verte et 3 boules rouges. Ces boules sont indiscernables au toucher.
On tire successivement les 5 boules sans remettre les boules tirées dans l'urne.
On note X_1 la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule blanche et X_2 la variable aléatoire égale au rang du tirage de la boule verte.

1. Déterminer les lois des variables aléatoires X_1 et X_2.
   Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_1.
   Est-ce que les variables aléatoires X_1 et X_2 sont indépendantes ?
2. On note X la variable aléatoire égale au rang du tirage où l'on obtient pour la première fois soit la boule blanche soit la boule verte.
   On note Y la variable aléatoire égale au rang du tirage à partir duquel on a obtenu la boule blanche et la boule verte.
   Remarque : en fait $X = \inf(X_1, X_2)$ et $Y = \sup(X_1, X_2)$
   Par exemple, si on a tiré rouge, rouge, verte, rouge, blanche, alors $X_1 = 5$ et $X_2 = 3$ et $X = 3$ et $Y = 5$
   Déterminer les lois des variables aléatoires X et Y.
   Calculer les espérances des variables aléatoires X et Y.

EXERCICE 5

Une urne contient n boules vertes et n boules rouges. On pioche p boules simultanément $(1 \leqslant p \leqslant 2n)$
On désigne par $V_{n,p}$ le nombre de boules rouges obtenues

1. Déterminer la loi et l'espérance de $V_{4,2}$. On donnera les probabilités sous la forme de fractions irréductibles.
2. Déterminer la loi de $V_{n,p}$ lorsque $p \leqslant n$.
3. Expliciter la loi de $V_{n,n}$. Montrer que $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ et en déduire que $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.
4. Déterminer la loi $V_{4,5}$. On donnera les probabilités sous la forme de fractions irréductibles.
5. Déterminer la loi de $V_{n,p}$ lorsque $p > n$.

Exercice 6 (EML 1997, modifié)

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce truquée telle que la probabilité d'apparition de "pile" soit égale à p , $p \in]0;1[$.
On pourra noter $q = 1 - p$.
Soit N un entier naturel non nul fixé.
On effectue N lancers du dé ; si n est le nombre de " 6" obtenus, on lance alors n fois la pièce.
On définit deux variables aléatoires X, Z de la manière suivante :

- Z indique le nombre de "6" obtenus aux lancers du dé,
- X indique le nombre de "piles" obtenus aux lancers de la pièce,

1. Donner la loi de Z ainsi que son son espérance et sa variance.
2. On suppose ici que $N = 1$. Donner la loi de X
3. On suppose ici que $N = 2$. Donner la loi de X.
4. On revient au cas général où N est un entier quelconque.
   (a) Pour $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(Z=n)}(X = k)$ lorsque $k \leqslant n$ puis lorsque $k > n$.
   (b) Montrer, pour tout couple d'entiers naturels (k, n) :
   - si $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$ alors $P(X = k \text{ et } Z = n) = \binom{n}{k}\binom{N}{n} \cdot p^k (1-p)^{n-k} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-n} \left(\frac{1}{6}\right)^n$
   - si $n > N$ ou $k > n$ alors $P(X = k \text{ et } Z = n) = 0$

EXERCICE 7

Une machine fabrique des pièces dont la probabilité de chacune d'être défectueuse est égale à $0,02$. On suppose que les défauts affectant les pièces sont mutuellement indépendants. On compare deux stratégies pour dépister les pièces défectueuses d'un lot de n pièces.

- La première consiste à tester les pièces une à une donc on procède à n tests;
- la seconde consiste à effectuer un test global sur un échantillon (c'est-à-dire si aucune pièce de l'échantillon n'est défectueuse alors tout le lot est composé de pièces non défectueuses) puis, si celui-ci s'avère positif, à tester toutes les pièces une à une.

On note Y_n la variable aléatoire égale au nombre de tests effectués en suivant la seconde stratégie.

1. Déterminer soigneusement $Y_n(\Omega)$ puis déterminer la loi de Y_n.
2. Calculer $E(Y_n)$ et montrer que $E(Y_n) - n = 1 - n(0,98)^n$
3. Etudier les variations de la fonction $f(x) = 1 - x(0,98)^x = 1 - x\exp(x\ln(0,98))$ sur l'intervalle $[2; +\infty[$.
   Données numériques :
   $$f(2) \simeq -0,92, \quad -\frac{1}{\ln(0.98)} \simeq 49,5, \quad f\left(-\frac{1}{\ln(0.98)}\right) \simeq -17,20 \quad f(278) \simeq -1,1 \times 10^{-2} \quad f(279) \simeq 5.10^{-3}$$
   En déduire l'existence d'un unique réel $\alpha > 0$ tel que $f(x) < 0$ sur $]0, \alpha[$ et $f(x) > 0$ sur $]\alpha, +\infty[$.
   Donner un encadrement de α.
4. Discuter suivant les valeurs de n la stratégie la plus intéressante.