Dans ce dm, un certain nombre d'exercices demandent des calculs sur tableur.
Vous devrez me transmettre par mail un et un seul fichier tableur (Excel ou OpenOffice exclusivement) contenant la totalité des calculs nécessaires.
Ce fichier tableur sera nécessairement dénommé de la façon suivante : prenom_nom_dm2.
En outre, les colonnes seront commentées (la colonne X traite de la suite Y)
Tout manquement à ces consignes entrainera la non correction du dm .... du contrevenant.

Exercice 1
Montrer par récurrence sur n les formules suivantes

$$\forall n \geqslant 3, \quad \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k(k-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Exercice 2
Calculer le terme général des suites suivantes

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \text{ avec } a_1 = a_2 = 1 \quad \forall j \in \mathbb{N}, \quad b_{j+1} = \frac{2}{3} b_j + 1$$

Exercice 3
Soit u une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -u_n + \dfrac{1}{n+1}$.
Exprimer u_1 en fonction de u_0 puis montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad (-1)^n u_n - u_0 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

Exercice 4
A l'aide d'un tableur (Excel ou OpenOffice), calculer les 50 premiers termes des suites suivantes.

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+1} = \frac{a_k}{1+(a_k)^2} \text{ avec } a_0 = 1 \qquad \forall n \geqslant 0, \quad b_n = \frac{b_{n-1} + b_{n-2}}{1 + b_{n-1} b_{n-2}} \text{ avec } b_0 = b_1 = 3.$$

$$\forall p \geqslant 1, \quad c_{p+1} = \frac{p c_p}{1 + p + (c_p)^2} \text{ et } c_1 = 2. \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad d_n = \sqrt{d_{n-1} + 4} \text{ avec } d_0 = 1.$$

$$\forall i \in \mathbb{N}^\times, \quad e_{i+1} = i \times e_i \text{ avec } e_1 = 1. \qquad \forall j \in \mathbb{N}, \quad f_{j+3} = \frac{f_{j+2} + f_{j+1} + f_j}{1 + f_j f_{j+1} f_{j+2}} 1 \text{ avec } f_0 = f_1 = f_2 = 1.$$

$$\forall n \geqslant 1, \quad g_{n+1} = g_n + n \text{ et } g_1 = 1. \qquad \forall p \geqslant 0, \quad h_{p+1} = h_p + \frac{1}{5^p} \text{ et } h_0 = 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad i_{n+1} = \ln(2 i_n + 3) \text{ et } i_0 = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad j_{n+1} = 2 + \sqrt{j_n} \text{ avec } j_0 = 0.$$

$$\forall k \in \mathbb{N}^\times, \quad \begin{cases} \alpha_{k+1} = \alpha_k + \dfrac{\beta_k}{k(k+1)} \\ \beta_{k+1} = \beta_k + \dfrac{\alpha_k}{k(k+1)} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = 2 \end{cases} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \begin{cases} \delta_{n+1} = 2\gamma_{n-1}\delta_n + \dfrac{\delta_{n-1}}{\gamma_n} \\ \gamma_{n+1} = \dfrac{\gamma_n + \gamma_{n-1} + 4\delta_n}{1 + (\delta_{n-1})^2} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \gamma_0 = 2 \\ \gamma_1 = 1 \\ \delta_0 = 3 \\ \delta_1 = 5 \end{cases}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}} \text{ avec } u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 3$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+2} = \frac{w_n w_{n+1}}{2 + w_n w_{n-1}} = 0 \text{ avec } w_0 = w_1 = 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+3} = (v_n v_{n+1} v_{n+2})^{1/3} \text{ avec } v_0 = 1,\ v_2 = 2,\ v_3 = 3$$

$$\forall m \in \mathbb{N}^\times, \quad z_{m+1} = \frac{1 + z_m + z_{m-1}}{(z_m)^2 + m(z_{m-1})^2} \text{ avec } z_0 = 1,\ z_1 = 2.$$

Exercice 5
Un capital K est placé au taux annuel t (i.e. : si la somme placée le 1er jour d'une année est S, le dernier jour de cette année, la somme a augmentée des intérêts égaux à $t.S$)
A la fin de chaque année, les intérêts s'ajoutent au capital (intérêts composés).
Soit C_n le capital disponible au bout de n années de placement.

1. **Question préliminaire** :

   (a) Calculer C_{n+1} en fonction de C_n et de t.

   (b) Exprimer C_n en fonction de K, de n et de t.

2. Une personne décide de se constituer un capital C en n années. Pour cela, elle verse le 1er janvier de chaque année une somme fixe K à une banque qui lui consent un taux d'intérêt annuel t.
   On suppose dans cette partie que les intérêts rapportés par la somme placée sont exonérés d'impôts.

   (a) Calculer, en fonction de K et de t la somme obtenue :

      i. Au 31 décembre de la 1er année de placement

      ii. Au 31 décembre de la 2ème année de placement.

      iii. Au 31 décembre de la 3ème année de placement.

   (b) On note D_n le capital D obtenu au 31 décembre de la $n^{\text{ième}}$ année de placement.

   Exprimer D_{n+1} en fonction de D_n, de K, de n et de t.

   (c) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad D_n = K(1+t).\dfrac{(1+t)^n - 1}{t}$.

3. Deux applications de la question 2 :

   (a) Calculer le montant K du versement qu'il faudrait effectuer chaque année pour obtenir un capital C sachant que :
   $$C = 500\ 000 \text{ euros}, \qquad n = 12 \text{ ans}, \qquad t = 9\ \% = 0{,}09$$

   (b) La jeune Julie, âgée de 25 ans, souhaite se constitue une épargne pour sa retraite, qu'elle prendra à 65 ans (enfin, elle l'espère ! :-)). Pour cela, elle compte placer chaque année une somme de 5 000 euros sur un compte rémunéré. Julie se demande s'il est possible de se constituer ainsi un capital de 1 million d'euros au bout des 40 ans de placement, c'est-à-dire existe-t-il un taux d'intérêt t tel que l'on ait
   $$5000(1+t) \times \frac{(1+t)^{40} - 1}{t} = 10^6 \Leftrightarrow (1+t) \times \frac{(1+t)^{40} - 1}{t} = 200 \Leftrightarrow (1+t)\left[(1+t)^{40} - 1\right] = 200t$$
   (Remarquer que $t \neq 0$ pour que l'équation initiale ait un sens)

      i. Etudier les variations de la fonction $f : t \mapsto (1+t)[(1+t)^{40} - 1] - 200t$ sur $\mathbb{R}_+$.

      Données numériques : $\left(\dfrac{201}{41}\right)^{1/40} - 1 = 0.040 \pm 10^{-3}$ et $f\left(\left(\dfrac{201}{41}\right)^{1/40} - 1\right) = -4.048 \pm 10^{-3}$.

      ii. En déduire que l'équation $(1+t)\left[(1+t)^{40} - 1\right] = 200t$ admet une et une solution t_0 sur $\mathbb{R}_+^{\times}$.

      iii. Justifier que $0.0675 < t_0 < 0.0676$.

      Données numériques : $f(0.0675) = -0.010 \pm 10^{-3}$ et $f(0.0676) = 0.025 \pm 10^{-3}$

   Remarque : *Plus généralement, pour une annuité fixée K, un nombre d'annuité n donnée et un capital final C donné, l'existence et la détermination du taux d'intérêt t_n est une question bien entendu naturelle que l'on résout par des études de fonctions et des applications judicieuses du théorème de bijection.*
   La détermination au cas par cas de t_n selon des valeurs concrètes de n, de K et de C, est longue et fastidieuse. Dans la pratique, l'entier n est grand (dans la pratique, on travaille sur des mois et non des années dont l'entier n prend rapidement des valeurs supérieures à 200).
   Nous verrons en fin d'année des techniques permettant d'obtenir l'ordre de grandeur de t_n lorsque n est grand (les techniques seront sophistiquées car c'est un problème difficile faisant appel à de nombreuses notions mathématiques)

4. **Gestion d'un capital à placement variable et à taux d'intérêt variable**.
   Nous allons rendre un peu plus réaliste le plan d'épargne de Julie. Supposons maintenant

- que l'on effectue toujours un placement chaque année mais que ce placement ne soit plus constant, qu'il dépende de l'année n (pour tenir compte, par exemple, d'année où l'on gagne un peu plus et d'année où l'on ne peut pas épargner autant qu'auparavant).
  On note K_n le placement effectué la $n^{\text{ième}}$ année.
- que les taux d'intérêts varient selon les années (compte-tenu, par exemple, du remontée probable des taux d'intérêts à moyen terme).
  On note t_n le taux d'intérêt applicable à la $n^{\text{ième}}$ année.

(a) Donner la relation de récurrence exprimant D_{n+1} en fonction de D_n, K_n, t_n et n.

(b) On revient sur le placement de Julie. Dans la pratique, on sait que les jeunes gens peuvent difficilement épargner durant les permières années en raison des achats et frais importants qu'ils doivent supporter initialement (voiture, appartement, emmenagement, enfants, etc.) Ce n'est qu'à partir de 40 ans, que Julie peut escompter économiser sérieusement.
D'autre part, il vraisemblable que les taux d'intérêts vont augmenter puis vont décroitre de nouveau.
Néanmoins, nous supposerons que l'épargne moyenne placée par Julie est de 5000 euros par an et que le taux d'intérêt moyen par an est de 6.75 % (on perturbe autour de la moyenne le modèle idéal)
Les choix suivants pour K_n et t_n sont des suites compatibles avec nos hypothèses (mais ce ne sont pas les seules)

$$K_n = 900 + 200n \qquad t_n = 0.05 + \frac{n}{400}(1 - \frac{n}{41})$$

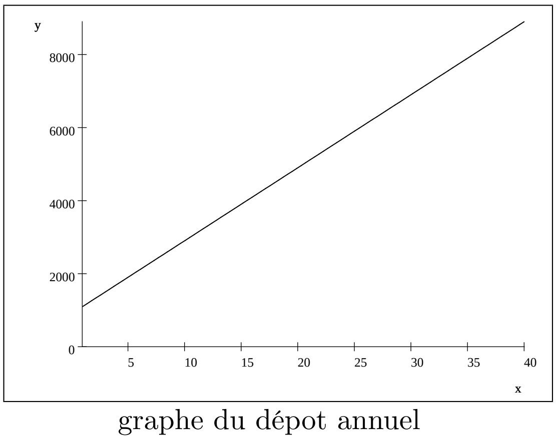
et l'on a la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad D_{n+1} = (1 + t_{n+1})(D_n + K_{n+1})$.
En utilisant un tableur, calculer le capital obtenu sous ces conditions par Julie au bout de 40 ans, c'est-à-dire calculer D_{40}.

Explications :

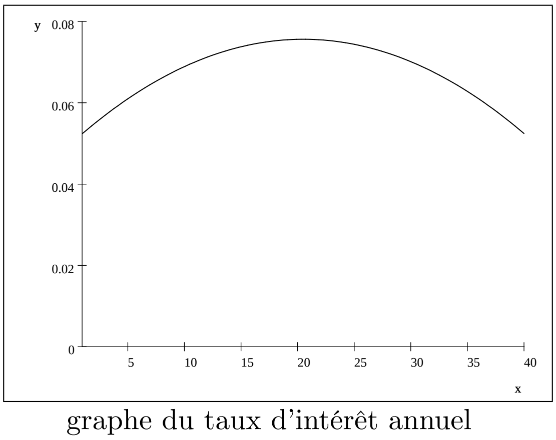
- *Julie va commencer par épargner* 900 *euros la première année puis elle va augmenter progressivement (linéairement) son épargne jusqu'à 65 ans. En moyenne, elle aura épargné exactement* 5000 *euros par an (donc similaire au cas initial), pendant 40 ans avec une épargne faible au début puis assez élevée vers la fin (*8900 *euros par an à la fin).*

  Calcul : elle aura déposé en moyenne $\frac{1}{40}\sum_{n=1}^{40}(900 + 200n) = 5000$
- *Pour le taux d'intérêt, celui commence à 5 % puis il monte continûment (mais non linéairement) jusqu'à 7.56 % au bout de 20 puis une baisse continue juqu'à 5 % au bout de 40 ans. En moyenne, le taux d'intérêt annuel est de 6.75 % par an (donc en similaire au cas initial)*
  Calcul : le taux moyen est de

$$\left[\prod_{n=1}^{40}(1 + 0.05 + \frac{n}{400}(1 - \frac{n}{41}))\right]^{1/40} - 1 = (13.624)^{1/40} - 1 = 0.0675 \pm 10^{-4}$$



graphe du dépot annuel



graphe du taux d'intérêt annuel