Exercice 1 (www.mathematiques.ht.st)
Montrer que les équations suivantes possède une solution dans l'intervalle I

(a) $I=[-1,1]$, $x^{2003}-x^{2002}+1=0$ (b) $I=[1,10]$, $\ln x=\dfrac{x^2-5}{x+2}$
(c) $I=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, $2x=\cos x$ (d) $I=[0,\frac{\pi}{4}]$, $\tan x=1-2x$

Exercice 2
Montrer que la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ se prolonge en une fonction continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$. Soit $\widetilde{f}$ son prolongement.
Montrer que $\widetilde{f}$ est une fonction de classe C^1 sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et expliciter sa dérivée.

Exercice 3
On pose $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-e^{-x}}{x} \text{ si } x\neq 0\\ 2 \text{ si } x=0\end{cases}$,$F(x)=\int_0^x f(t)dt$ et $H(x)=\dfrac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt$

1. Montrer que la fonction f est C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que F est une fonction dérivable et calculer sa dérivée.
   En déduire que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que H est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et C^2 sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
   Exprimer H en fonction de $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.
   En déduire que H se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4
On considère la suite u définie par $u_0\in\mathbb{R}_+$ et $u_{n+1}=\frac{1}{5}(4+u_n^2)$

1. Etudier la fonction $f(x)=\frac{1}{5}(4+x^2)$.
   En déduire que $f([1,4])\subset[1,4]$ et $f([4,+\infty[)\subset[4,+\infty[$
2. On suppose dans cette question que $u_0=2$.
   (a) Montrer que $\forall n\geqslant 0$, $u_n\in[1,4]$.
   (b) Déterminer la monotonie de u. Conclure
3. On suppose dans cette question que $u_0=6$.
   (a) Montrer que $\forall n\geqslant 0$, $u_n\in[4,+\infty[$.
   (b) Déterminer la monotonie de u. Conclure

Exercice 5
Soit u la suite définie par $u_0=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=1+\dfrac{2}{u_n}$.

1. Soit $f: x\mapsto 1+\dfrac{2}{x}$
   (a) Etudier la fonction f et tracer $\mathcal{C}_f$ ainsi que la droite $y=x$ (unité 4 cm). Placer sur ce graphique, les points $u_0,..,u_5$
   (b) Montrer que $[1,3]$ est un intervalle stable par f.
2. Montrer que $\forall n\geqslant 0$, $u_n\in[1,3]$.
3. Déterminer la monotonie des suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.
4. En déduire que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent et déterminer leurs limites respectives. Conclure.

Exercice 6
Soit u la suite définie par $u_0\in[3;4]$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=4-\dfrac{ln\ u_n}{4}$.

1. Soit $f(x)=4-\dfrac{ln\ x}{4}$.
   (a) Etudier la fonction f et montrer que l'intervalle $[3;4]$ est stable par f.
   (b) Etudier le signe de la fonction $f(x)-x$ sur $[3,4]$.
   En déduire que f possède un unique point fixe $L\in[3;4]$
2. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, u_n existe et $u_n\in[3;4]$.
3. Première méthode :
   Etudier la monotonie de la suite u et conclure.

4. <u>Deuxième méthode</u> :

   (a) Montrer que $\mid f'(x) \mid \leq \dfrac{1}{12}$ $\forall x \in [3;4]$.

   En déduire que $\mid u_{n+1} - L \mid \leq \dfrac{1}{12} \mid u_n - L \mid$

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mid u_n - L \mid \leq (\dfrac{1}{12})^n \mid u_0 - L \mid$.

   En déduire le plus petit entier n tel que $\mid u_n - L \mid \leq 10^{-5}$.

   (c) Ecrire un programme en Turbo qui calcul L avec une précision de 10^{-5}.

Exercice 7

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(4 - u_n^2)$.

1. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{3}(4 - x^2)$.

   (a) Etudier les variations de f et déterminer ses points fixes sur cet intervalle.

   (b) Tracer $\mathcal{C}_f$ et la droite $y = x$ dans un même reprère (échelle 4cm pour une unité).

   Construire dans ce graphe les points u_i pour $0 \leq i \leq 6$.

   (c) Montrer que $\forall x \in [0, \frac{4}{3}]$, $\quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{8}{9}$.

   (d) Montrer que $f\left(\left[0, \dfrac{4}{3}\right]\right) \subset \left[0, \dfrac{4}{3}\right]$.

2. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in \left[0, \dfrac{4}{3}\right]$.

   Nous allons montrer que la suite (u_n) tend vers 1 de deux manières différentes.

3. <u>Première méthode</u> :

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{8}{9}|u_n - 1|$.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - 1| \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$ et conclure.

   (c) A partir de quel rang a-t-on : $|u_n - 1| \leq 10^{-5}$?

4. <u>Deuxième méthode</u> :

   (a) A l'aide des variations de f sur $\left[0, \dfrac{4}{3}\right]$, montrer que la suite extraite (u_{2n}) est majorée par $\dfrac{4}{3}$ et croissante.

   En déduire qu'elle tend vers 1.

   (b) De même, montrer que la suite extraite (u_{2n+1}) est minorée par 0 et décroissante ; en déduire qu'elle converge vers 1.

   (c) Conclure.

Exercice 8

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :
$\forall x \in \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ n'a qu'une seule solution strictement positive, notée u_n.
2. Calculer u_1 et u_2 puis vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}$ $u_n \in]0, \dfrac{2}{3}[$.
3. Montrer que, pour tout x élément de $]0,1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
4. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite (u_n).
5. Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note λ sa limite.
6. A l'aide de la question 2., déterminer la limite de $(u_n)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

   En déduire la valeur de λ.

Exercice 9

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on considère l'équation $(E_n) : x + \ln x = n$.
Pour $n \geqslant 1$, on introduit la fonction $f_n(x) = x + \ln x - n$

1. Montrer que, $\forall n \geqslant 1$, l'équation (E_n) possède une unique solution x_n.

   Nous allons déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n \geqslant 1}$.
2. Calculer $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_n)$. En déduire la monotonie de la suite $(x_n)_n$.
3. Montrer que la suite $(x_n)_n$ ne peut converger vers une limite finie L.

   Conclure.
4. Justifier que $x_n + \ln x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} x_n$. En déduire que $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n$