Exercice 1
Une urne contient des jetons numérotés de 1 à p ($p \geqslant 2$). On effectue N tirages successifs ($N \geqslant 1$). Chaque tirage consiste à prendre un jeton dans l'urne, noter son numéro, puis remettre le jeton dans l'urne.
Pour tout entier i compris entre 1 et p, on définit les variables aléatoires F_i et X_i comme suit :
F_i est le nombre de fois où le jeton $n^\circ\ i$ a été tiré.
X_i prend la valeur 0 si le jeton $n^\circ\ i$ n'a pas été tiré et prend la valeur 1 si il a été tiré au moins une fois.

1. Etude des variables aléatoires F_i.
   (a) Pour tout i compris entre 1 et p, déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire F_i.
   (b) On considère la variable aléatoire $F = \sum\limits_{i=1}^{p} F_i$.
   Que vaut F ? Calculer l'espérance et la variance de F.
   (c) Calculer $\sum\limits_{i=1}^{p} V(F_i)$. Est-ce que les variables aléatoires F_i sont deux à deux indépendantes ?
2. Etude des variables aléatoires X_i.
   (a) Pour tout i compris entre 1 et p, déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_i.
   (b) Soient i et j deux entiers distincts compris entre 1 et p.
   Déterminer la probabilité pour que simultanément $X_i = 0$ et $X_j = 0$.
   Est-ce que les variable X_i et X_j sont indépendantes ?
   (c) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $X = \sum\limits_{i=1}^{p} X_i$

Exercice 2
On dispose de deux urnes U_1 et U_2, de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1 et 2, l'urne U_2 contient les boules numérotées $3, 4, 5$ et 6.
On appelle échange l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après n échanges successifs.

1. Les cinq premiers lancers du dé donnent : $1, 3, 2, 3, 5$.
   Quel est le contenu de U_1 à l'issue du cinquième échange ?
2. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer son espérance mathématique $E(X_1)$.
3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.
   Calculer la covariance du couple (X_1, X_2).
4. Montrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^\times$, on a :
   $P(X_{n+1} = 0) = \dfrac{1}{6} P(X_n = 1), \quad P(X_{n+1} = 6) = \dfrac{1}{6} P(X_n = 5)$
   $\forall k \in \{1, .., 5\}, \quad P(X_{n+1} = k) = \dfrac{7-k}{6} P(X_n = k-1) + \dfrac{k+1}{6} P(X_n = k+1)$.
5. En déduire que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^\times$: $E(X_{n+1}) = \dfrac{2}{3} E(X_n) + 1$.
   Calculer alors $E(X_n)$ en fonction de n, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n)$.

Exercice 3
Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts ($n \geqslant 2$). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p appartenant à $]0, 1[$ et la probabilité de ne pas l'obtenir est q, avec $q = 1 - p$.

1. Soit X le nombre de correspondants obtenus lors de ces n appels. Quelle est la loi de X ? Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.
2. Après ces n recherches, la secrétaire demande une deuxième fois chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas obtenus la première fois. Soit Y le nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels, et $Z = X + Y$ le nombre total de correspondants obtenus.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par Z ?
   (b) Calculer $p_0 = P(Z = 0)$, $p_1 = P(Z = 1)$.
   Montrer que $p_1 = npq^{2n-2}(1 + q)$.
   (c) Calculer la probabilité conditionnelle $P((Y = h)/(X = k))$ pour $k \in \{0, .., n\}$ et $h \in \{0, .., n - k\}$.
   (d) Démontrer $P(Z = s) = \sum\limits_{k=0}^{s} P((X = k) \cap (Y = s - k))$.
   (e) Calculer $p_s = P(Z = s)$, vérifier que $C_n^k C_{n-k}^{s-k} = C_n^s C_s^k$.
   En déduire que $p_s = C_n^s [p(1 + q)]^s (q^2)^{n-s}$
   (f) Montrer que $q^2 = 1 - p(1 + q)$ et reconnaitre la loi suivie par Z