Exercice 1
Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2x+y+z=-5 & =-5 \\ 2x+13y-7z=-1 & =-1 \\ x-y+z=1 & =1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y+2z=1 \\ 4x-y+3z=-1 \\ 2x+5y+z=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+3y-z+t & =1 \\ 2x+13-7z+2t & =2 \\ x-y+z+t & =0 \\ x+7y-4z+t & =-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y+z+t=-1 \\ x+z+t=0 \\ x+y+t=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+y=2 & =2 \\ x+2y=1 & =1 \\ x+y=1 & =1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} u+w=1 \\ v+w=0 \\ u+v=12 \\ u+3v=0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x+y+z+t=-5 \\ 2x+3y-3z+t=-1 \\ x-y+z-t=1 \end{cases}$

Exercice 2
Résoudre, en fonction des paramètres réels a, b, c, d, et m les systèmes suivants :

a)$\begin{cases} 2x+3my=a \\ 2mx+3y=b \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-y-z=a \\ 2x+y-z=b \\ x+y-3z=c \\ 2x-y-z=d \end{cases}$ c) $\begin{cases} mx+(m-1)y+z=2 \\ mx+y+mz=2m \\ mx+(m+1)y+z=2m \end{cases}$

Exercice 3

1. On considère le système (E_λ) : $\begin{cases} (1-\lambda)x+y+z=0 \\ x+(1-\lambda)y+z=0 \\ x+y+(1-\lambda)z=0 \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Pour quelles valeurs de λ, le système (E_λ) est de Cramer.
   (b) Résoudre le système selon les valeurs de λ
2. Mêmes questions avec (F_λ) : $\begin{cases} (1-\lambda)x-3y+6z=0 \\ 6x-(8+\lambda)y+12z=0 \\ 3x-3y+(4-\lambda)z=0 \end{cases}$

   puis avec (G_λ) : $\begin{cases} -\lambda x+2y+2z=0 \\ 2x-\lambda y-z=0 \\ -x-y-\lambda z=0 \end{cases}$

Exercice 4
On considère les matrices $L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Calculer les produits LC et CL.

Exercice 5
A et B étant des matrices carrées, développer et simplifier
$$(2A)(3B)-(A+2B)^2+(A-B)(A+B)$$

Exercice 6
Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
Déterminer toutes les matrices carrées B d'ordre 2 telles que $AB = BA$.

Exercice 7
On considère les systèmes $\begin{cases} 3x+2y-7z+t=a \\ x-y+2z-t=b \\ x+y-z+3t=c \end{cases}$ et $\begin{cases} u-3v+w=x \\ u-2v-w=y \\ -2u+3v+2w=z \\ 3u-v+w=t \end{cases}$

Réecrire matriciellement ces deux systèmes.
En déduire l'expression de a, b et c en fonction de u, v et w.

Exercice 8
Calculer A^2, A^3, A^4 avec $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.
Quelle formule intuite-t-on ? La démontrer par récurrence.

Exercice 9
On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculer J^2, J^3 et J^4 en fonction de J.
Montrer par récurrence que $\forall n \geqslant 0, \quad J^n = 4^{n-1}J$

Exercice 10
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. Expliciter α et β tel que $A^2 = \alpha A + \beta Id$
2. Montrer par récurrence qu'il existe a_n et b_n tels $A^n = a_n A + b_n Id$
3. Expliciter a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
4. Expliciter a_n en fonction de n.
5. Calculer de deux façons distinctes $\sum_{k=0}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)$.
   En déduire l'expression de b_n.
6. Déterminer tous les coefficients de la matrice A^n