Exercice 1
Déterminer parmi les matrices suivantes, les matrices inversibles et le cas échéant déterminer son inverse

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer $A^3 - 3A^2 + 2A$
2. Montrer, sans calcul, que si A est inversible alors $A^2 - 3A + 2Id = 0$
3. Par un calcul direct, évaluer $A^2 - 3A + 2Id$. Conclusion

Exercice 3
Soit $a \in \mathbb{R}^\times$. On considère le système (S) : $\left\{ \begin{array}{rcl} ay + a^2 z & = & a^2 \\ \frac{1}{a}x + az & = & a \\ \frac{1}{a^2}x + \frac{1}{a}y & = & 1 \end{array} \right.$

1. Déterminer trois matrices A,X,B telles que
   - $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, $\quad X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
   - le système (S) est équivalent à l'équation matricielle $AX = B$
2. Montrer que $A^2 - A - 2I = 0$.
3. En déduire que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.
4. Résoudre le système (S)

Exercice 4
A l'aide d'un système convenable, montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse

Exercice 5
On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer J^2,J^3 et J^4. Que peut-on en déduire de J^k pour $k \geqslant 4$?
2. Développer algébriquement l'expression $(I + J)(I - J + J^2 - J^3)$.
3. La matrice $(I + J)$ est-elle inversible? Si oui, expliciter cet inverse.
4. Déterminer les solutions du système $\left\{ \begin{array}{rcl} a + c - d & = & 2 \\ -2a + 2b + 2c - d & = & 0 \\ 2a - b & = & 0 \\ 3a - 2b - 2c + d & = & 3 \end{array} \right.$

Exercice 6
Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

1. Pour quelle valeur du réel λ la matrice $A - \lambda I_4$ est inversible?
2. Déterminer toutes les matrices $X \in \mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ telles que $AX = \lambda X$ lorsque $\lambda = -1$ puis $\lambda = -3$

Exercice 7
Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer l'ensemble S des nombres réels λ tels que la matrice $A - \lambda I_3$ ne soit pas inversible
2. Pour chaque $\lambda \in S$, déterminer toutes les matrices $X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telles que $AX = \lambda X$
3. Soit P la matrice $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   Montrer que $P^3 - P^2 + P - Id = 0$.
   En déduire P est inversible et expliciter P^{-1}
4. Calculer $D = P^{-1}AP$ puis D^n.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$. En déduire l'expression de A^n.