Exercice 1

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < 1$ et $0 < b < 1$.
On effectue une suite d'expérience aléatoires consistant à jeter simultanément deux pièces de monnaie notées A et B. On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque expérience les résultats des deux pièces sont indépendants. On suppose que lors d'une expérience, la probabilité que la pièce A donne "pile" est a, et que la probabilité que la pièce B donne "pile" est b.
Soit X le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce A donne "face" pour la première fois, et Y le nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que la pièce b donne "face" pour la première fois.

1. Quelles sont les lois de probabilités de X et de Y ? Calculer $E(X)$.
   Trouver pour tout entier naturel k, la valeur de $P(X \geqslant k)$.
   On s'intéresse au nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que l'une au moins des pièces donne "face" pour la première fois.. Pour cela, on note M la var définie par
   $$M = \min(X,Y).$$
   Calculer, pour tout entier naturel k, la probabilité $P(M \geqslant k)$. En déduire la loi de probabilité de M.
   Déterminer la probabilité que la pièce B ne donne pas "face" avant la pièce A, c'est-à-dire que $P(Y \geqslant X)$.
2. On note $U = X + Y$.
   Déterminer la loi de probabilité de U.
   Calculer, pour tout couple (j,k) d'entiers naturels, les probabilités conditionnelles
   $$P(Y = k/U = j).$$
3. On suppose désormais que $a = b$. On note $V = Y - X$.
   Calculer, pour tout entier naturel k et tout entier relatif r, la probabilité de l'évènement ($M = k$ et $V = r$).
   Trouver la loi de probabilité de V. Les var M et V sont-elles indépendantes?

Exercice 2

On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger chaque jour par une entreprise suit une loi de Poisson de paramètre 5. Ces colis sont expédiés indépendamment les uns des autres.
La probabilité pour qu'un colis expédié à l'étranger soit détérioré est égale à 0,1.
On s'intéresse aux colis expédiés à l'étranger un jour donné :

- N est la variable aléatoire égale au nombre de colis expédiés ;
- X est la variable aléatoire égale au nombre de colis détériorés ;
- Y est la variable aléatoire égale au nombre de colis en bon état.

On a donc : $X + Y = N$.

1. Soit n un entier naturel ;
   calculer, pour tout entier naturel k, la probabilité conditionnelle suivante : $P_{(N=n)}(X = k)$.
2. Donner la loi du couple (X,N), puis montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre 0,5.
3. Déterminer la loi de Y.
4.
   (a) Si i et j sont deux entiers naturels, calculer la probabilité : $P((X = i) \cap (Y = j))$.
   (b) X et Y sont-elles indépendantes?