Exercice 1 Deux pièces A et B sont reliées entre elles par une porte ouverte. Seule la pièce B possède une issue vers l'extérieur. Une guêpe initialement dans la pièce A voudrait sortir à l'air libre. Son trajet obéit aux règles suivantes :

- Lorsqu'elle est en A au temps $t = n$, alors, au temps $t = n + 1$, elle reste en A avec une probabilité égale à $\frac{1}{3}$, ou elle passe en B avec une probabilité égale à $\frac{2}{3}$
- Lorsqu'elle est en B au temps $t = n$, alors, au temps $t = n+1$, elle retourne en A avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$, ou elle reste en B avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$, ou elle sort à l'air libre avec une probabilité égale à $\frac{1}{4}$.

Au temps $t = 0$, la guêpe est en A. Lorsqu'elle sort à l'air libre, elle ne revient plus.
On note $\mathcal{A}_n$ (resp. $\mathcal{B}_n$, resp. $\mathcal{S}_n$) les événements : "à l'instant $t = n$, elle est en A (resp. en B, resp. elle sort), et a_n, b_n, s_n leurs probabilités respectives.

1. Calculer a_0, b_0, s_0,a_1, b_1, s_1.
2. Sachant qu'au temps $t = 2$ elle est en A, quelle est la probabilité qu'elle ait été en B au temps $t = 1$?
   On pose $Z_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$
3. Expliciter une matrice M telle que
   $$Z_{n+1} = MZ_n$$
   puis exprimer Z_n en fonction de M,n et Z_0.
4. Déterminer l'ensemble S tel que $\lambda \in S$ ssi la matrice $M - \lambda I_2$ n'est pas inversible?
5. Résoudre l'équation $MZ = \lambda Z$ lorsque $\lambda \in S$
6. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{4}{3} & 2 \end{pmatrix}$.
   Vérifier que $3P^2 - 9P + 10I_2 = 0_2$. En déduire que P est inversible et expliciter son inverse
7. Déterminer une matrice H telle que $H = P^{-1}MP$, calculer H^n
8. Exprimer H^n en fonction de P et M^n.
   En déduire les 4 coefficients de la matrice M^n.
9. Donner l'expression de a_n et b_n en fonction de n.
10. Justifier que $\forall n \geqslant 2,\ s_n = \frac{1}{4}b_{n-1}$. En déduire s_n en fonction de n.
11. On note S la variable aléatoire égal à l'instant où la guêpe sort à l'air libre.
    (a) Donner la loi de S.
    (b) En moyenne, à quel instant sort-elle à l'air libre?

Exercice 2 On considère les matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcul des puissances de M

1. Déterminer l'expression de D^n, pour tout entier naturel n non nul.
2. Calculer PQ. En déduire que P est inversible et exprimer P^{-1} , sous forme d'un tableau de nombres.
3. Calculer le produit $P^{-1}MP$
4. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\times}, \quad M^n = PD^nP^{-1}$.

5. Ecrire M^n sous la forme d'un tableau de nombres, où n est un entier naturel non nul.

Suites définies par une relation de récurrence

On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ v_0 = 0 \\ w_0 = 1 \end{cases}$. et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2w_n}{4} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{2} \\ w_{n+1} = \dfrac{u_n + 2w_n}{4} \end{cases}$

Pour tout entier naturel n,on note : $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$

1. Exprimer X_{n+1} en fonction de M et de X_n
2.
   (a) En déduire l'expression de X_n en fonction de M^n et de X_0 pour tout entier n, supérieur ou égal à 1.
   (b) A l'aide des résultats obtenus en 5, déterminer alors l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n.
   (c) Déterminer les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n).

Exercice 3 On donne les matrices suivantes: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. CalculerA^2 et montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera tels que $A^2 = aA + bI_3$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3.
3. Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies par les relations de récurrence:
$$u_0 = 0; \quad v_0 = 1; \quad u_{n+1} = -u_n + v_n; \quad v_{n+1} = 2u_n$$
   Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0$, $\quad A^n = u_nA + v_nI_3$.
4.
   (a) On pose $x_n = u_n + v_n$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $x_n = 1$.
   (b) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $y_n = 2u_n - v_n$.
   Montrer que la suite (y_n) est géométrique et préciser sa raison. Exprimer alors y_n en fonction de n.
   (c) En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.
5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a
$$A^n = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n\right].A + \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n\right].I_3$$
   Cette formule est-elle encore valable pour $n = -1$?

Exercice 4 Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

1. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$
   Calculer PQ. En déduire que P est inversible et déterminer P^{-1}
2. Montrer qu'il existe une matrice B telle que $A = PBP^{-1}$ et expliciter cette matrice.
3. On pose $N = B - 4I_3$. Calculer N^2. En déduire N^k
4. Calculer B^n.
5. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $\quad A^n = PB^nP^{-1}$.
6. En déduire les neufs coefficients de A^n
7. Pour quelles valeurs de μ la matrice $A - \mu I_3$ est inversible.

8. Déterminer les solutions $X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de l'équation $AX = \mu X$ lorsque $A - \mu I_3$ n'est pas inversible
9. Déterminer l'inverse de B. A partir de la question 2 (<u>et d'elle seule</u>), montrer que A est inversible
10. A partir de la question 2 (<u>et d'elle seule</u>), montrer que $A^{-1} = PB^{-1}P^{-1}$
    En déduire l'inverse de A

Exercice 5 On considère la suite u définie par :

$$u_0 = 2, u_1 = 1, u_2 = -1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n.$$

L'objectif de l'exercice est d'expliciter u_n en fonction de n.
Soit Ala matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} (le détail de la méthode et les étapes du calcul devront figurer sur la copie). Que vaut $P^{-1}AP$?
2. On pose $D = P^{-1}AP$. Calculer D^n.
3. Quelle est la relation entre D^n et A^n ? En déduire l'expression de la matrice A^n.
4. Pour tout n de $\mathbf{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que l'on a, pour tout n dans $\mathbb{N}$: $X_{n+1} = AX_n$.
   (b) En déduire X_n en fonction de A^n et de X_0,
   (c) Déterminer la valeur de u_n en fonction de n.

Exercice 6 Un feu bicolore, lorsqu'il est rouge, passe au vert avec la probabilité p, et, lorsqu'il est vert, passe au rouge avec la probabilité q ($0 < p < 1$ et $0 < q < 1$). On note r_n (respectivement v_n) la probabilité que ce feu soit au rouge (respectivement au vert) à l'instant $t = n$.

1. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :
$$r_{n+1} = (1-p)r_n + qv_n \quad et \quad v_{n+1} = pr_n + (1-q)v_n.$$
2. En déduire l'existence d'une matrice carrée A d'ordre 2 telle que
   $\begin{pmatrix} r_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et montrer par récurrence que $\begin{pmatrix} r_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} r_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.
3. Déterminer deux matrices B et C telles que $\begin{cases} B + C = I \\ B + (1-p-q)C = A \end{cases}$.
4. Calculer B^2, C^2, BC et CB.
5. Calculer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, A^n à l'aide de la formule du binôme de Newton.
6. En déduire les valeurs de r_n et v_n en fonction de n, r_0 et v_0 puis les limites éventuelles des suites (r_n) et (v_n).

Exercice 7 *Le problème est composé de deux parties :*

- *la première partie a pour objectif d'expliciter la puissance* $n^{\text{ème}}$ *d'une certaine matrice*
- *La seconde partie étudie la loi d'une variable aléatoire et utilise les résultats de la première partie*

On considère la matrice A suivante : $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$

Calcul de la puissance $n^{ème}$ de A.

1. Calculer le produit matriciel $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. La matrice A est-elle inversible?*
2. Calculer A^2,A^3 et montrer que : $A^3 = \frac{1}{2}(A^2 + A)$
3. Prouver, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul, il existe des réels a_n et b_n tels que :
   $A^n = a_nA^2 + b_nA$ avec $\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & b_n + \frac{1}{2}a_n \\ b_{n+1} & = & \frac{1}{2}a_n \end{array}\right.$.
   Donner a_1 et b_1
4. Montrer que pour tout n non nul : $a_n + b_n = 1$.
   En déduire que : $b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}$
5. Exprimer alors b_n et $a_n$en fonction de n.

Etude de la loi d'une variable aléatoire X_n
Un point lumineux se déplace sur les sommets d'un triangle, notés C_0,C_1,C_2 selon le protocole suivant :

- - A l'instant 0, le point lumineux se situe en C_0
- Si à l'instant n,$n \in \mathbb{N}$, le point lumineux est en C_0, à l'instant $n+1$ il est en C_1
- Si à l'instant n,$n \in \mathbb{N}^\times$, le point lumineux est en C_1, à l'instant $n+1$ il est en C_0 avec la probabilité $\frac{1}{4}$, en C_1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$, en C_2 avec la probabilité $\frac{1}{4}$.
- Si à l'instant n,$n \in \mathbb{N}^\times \backslash \{1\}$ le point lumineux est en C_2, à l'instant $n+1$ il est en C_1.

On appelle X_n la variable aléatoire égale à i si le point lumineux se trouve à l'instant n sur le sommet C_i, pour $i \in \{0,1,2\}$

1. On note U_n la matrice unicolonne : $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$ où $P(X_n = i)$ est la probabilité de l'événement $(X_n = i)$.
   Préciser U_0 et U_1.
2. Utiliser la formule des probabilités totales et montrer que : $U_{n+1} = AU_n$
3. En déduire que pour tout entier n non nul : $U_n = A^nU_0$.
   Préciser U_2, puis montrer que : $U_n = a_nU_2 + b_nU_1$.
4. En déduire les probabilités $P(X_n = 0)$,$P(X_n = 1)$,$P(X_n = 2)$ en fonction de n, ainsi que leur limite quand n tend vers $+\infty$.
5. Montrer que l'espérance de X_n est indépendante de n.