Symboles de sommation

Exercice 1 (http://abdellah.bechata.free.fr)
Ecrire sans le symbole $\sum$ les expressions ci-dessous :

$a)\ \sum_{k=1}^{5} k^2 \quad b)\ \sum_{j=3}^{8} \frac{j}{3^j} \quad c)\ \sum_{n=1}^{5} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} \quad d)\ \sum_{i=n}^{2n} i \quad e)\ \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n+i} \quad f)\ \sum_{p=3}^{5} x(1-x^2)^p$

Exercice 2
Ecrire les sommes suivantes avec le symbole $\sum$

1) $2^5+3^5+4^5+..+n^5$ 2) $1-a+a^2-a^3+...+(-1)^n a^n$ 3) $\frac{a^2}{2}+\frac{a^4}{4}+\frac{a^6}{6}+...+\frac{a^{2n}}{2n}$
4) $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-..+(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$ 5) $\ln(1\times 2\times 3\times ..\times n)$.

Exercice 3
Calculer les sommes suivantes :

$A_n = \sum_{k=0}^{n} (5k+2) \quad B_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{2^j}{3^{j+1}} \quad C_n = \sum_{p=2}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^p \quad D_N = \sum_{n=1}^{N} 2^n + 3^{2n}$

Exercice 4
Soient $S_n = \sum_{j=1}^{n} j^2$, $T_n = \sum_{j=1}^{n} (j+1)^2$ et $A_n = \sum_{j=1}^{n} j$

1. Exprimer S_{n+1} en fonction de S_n et de n.
2. A l'aide d'un changement de variable adéquat, exprimer T_n en fonction de S_{n+1}.
3. En développant $(j+1)^2$, exprimer T_n en fonction de S_n, de A_n et de n.
4. En déduire la valeur de A_n.

Exercice 5

1. Déterminer deux réels a et b tels que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$. En déduire $\sum_{r=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$
2. (Principe des dominos).

   Soient a_0,a_1,...,a_n des nombres réels. A quoi est égale la somme $\sum_{p=0}^{n-1} (a_{p+1}-a_p)$?

Exercice 6
On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} [(k+1)^3 - k^3]$

1. A l'aide du principe des dominos, calculer T_n.
2. Développer $(k+1)^3 - k^3$. En déduire l'expression de T_n en fonction de S_n et de n.
3. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. Calculer, pour tout entier n, les sommes suivantes :
   $A_n = \sum_{k=1}^{n} (k^2+3k-1) \quad B_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)(k+3)$.

Principe de récurrence

Exercice 7
Montrer par récurrence les égalités suivantes :

1) $\forall n \geqslant 0,\ \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ 2) $\forall n \geqslant 1,\ \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2$
3) $\forall n \geqslant 0,\ \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$. 4) $\forall n \geqslant 3,\ \sum_{k=3}^{n} 4k(k-1)(k-2) = n(n+1)(n-1)(n-2)$
5) $\forall n \geqslant 0,\ \ln x^n = n \ln x$ 5) $\forall n \geqslant 0,\ e^{nx} = (e^x)^n$