Exercice 1
Soit u la suite définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = 2u_n - 4$.

1. Déterminer les limites éventuelles de u.
2. Déterminer le réel β tel que la suite v définie par $v_n = u_n - \beta$ soit géométrique.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n puis la limite de u. Calculer $\sum_{j=0}^{n} u_j$.

Exercice 2
Soient u et v les deux suites définies pour tout $n \geq 0$ par $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2u_n + v_n)$ et $v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n)$.

1. Déterminer les limites éventuelles de u et de v.
2. On pose $t_n = u_n - v_n$ et $s_n = u_n + v_n$.
   Montrer que t et s sont deux suites géométriques. En déduire l'expression de t_n (resp. s_n) en fonction de t_0 (resp. s_0). Déterminer les entiers n tels que $|t_n| \leqslant 10^{-3}$.
3. En déduire l'expression de u_n et de v_n en fonction de n, de u_0 et de v_0.
4. Déterminer la limite de u et de v.
5. Calculer $\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\sum_{k=0}^{n} v_k$.

Exercice 3
Soit u la suite définie par $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \geq 1, u_{n+1} + \dfrac{1}{2}u_n - \dfrac{1}{2} = 0$.

1. Déterminer les limites éventuelles de u.
2. Déterminer le réel γ tel que la suite v définie par $v_n = u_n - \gamma$ soit géométrique.
3. Expliciter u_n en fonction de n puis déterminer la limite l de u.
4. Trouver le plus petit n tel que $|u_n - l| < 10^{-3}$.

Exercice 4
Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \geq 0$, $u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3$.

1. Déterminer les limites éventuelles de u.
2. Montrer $v_n = u_n + 2n - 1$ est le terme général d'une suite géométrique.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
4. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n.
5. Déterminer la limite de S_n et trouver le plus petit entier n tel que $S_n \geq 2 - \dfrac{1}{2^{100}}$.
6. Calculer $T_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n et déterminer la limite de la suite T.

Exercice 5
On définit deux suites a et b par $a_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ et $b_n = a_n + \dfrac{1}{n \times n!}$.
Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Conclusion.

Exercice 6
Soit $(a_n)_n$ une suite décroissante qui converge vers 0 et $S_n = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k a_k$.
Montrer que les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes. En déduire que S converge.

Exercice 7
Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites u et v par
$u_0 = a$, $u_1 = b$ et $\forall n \geqslant 0$ $u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $0 < u_n < v_n$.
2. Montrer que la suite u est croissante et la suite v est décroissante
3. Démontrer que $\forall n \geqslant 0$, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n - u_n)$
4. Déduire des questions précédentes que les deux suites sont convergentes.
5. Calculer de deux façons différentes la limite de $u_{n+1}v_{n+1}$. En déduire la limite de u et v.