Exercice 1
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$(a) : 15x^2 - 22x + 8 \leqslant 0 \quad (b) : \frac{5x+2}{x-1} \geqslant 0 \quad (c) : (2x-3)(3-2x) < 0 \quad (d) : \frac{x}{2} + \frac{8}{x} \geqslant 4$$

Exercice 2
Déterminer $\min\limits_{x>0}(\frac{x}{a} + \frac{b}{x})$ lorsque a et b sont deux réels strictement positifs

Exercice 3
Déterminer l'équation de la tangente de la fonction $x \mapsto \ln(3+4x)$ au point d'abscisse 1 puis étudier la position relative de la tangente.

Exercice 4
Soit f la fonction telle que $f(x) = -\dfrac{5x^2+6x+9}{2x^2+6x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Etudier la fonction f et tracer $\mathcal{C}_f$.
2. Déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la droite d'équation $y = -\dfrac{5}{2}$.
3. Donner une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en ce point et tracer cette tangente.
4. Déterminer trois réels a, b, c tels que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-3;0\},\ f(x) = a + \frac{b}{2x} + \frac{c}{x+3}$

Exercice 5
On considère la fonction f telle que $\forall x \in \mathbb{R}^{\times}, \quad f(x) = x\ln(x^2) - 2x$.
On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f, puis mettre la fonction f sous la forme
$$\forall x \in \mathbb{R}^{\times},\ f(x) = ax\ln x$$
où a et b sont deux réels à déterminer
2. Etudier les variations de f et tracer $\mathcal{C}_f$. On précisera
   - les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses ;
   - les branches infinies (i.e. les asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$) de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 6
On considère f la fonction définie sur l'ouvert $]0,1[\times]0,1[$ de $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = (1-x)^n + (1-y)^n + (x+y)^n$$

1. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
2. Démontrer que le système $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\end{array}\right.$ possède une unique solution (x_0, y_0)
3. Calculer $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0), \quad s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0), \quad t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)$ et $r^2 - st$.

Exercice 7
On pose $f(x,y) = 4x^2 - 2xy + 7y^2 + 4$

1. Déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.
2. Démontrer que le système $\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0\end{array}\right.$ possède une unique solution (x_0, y_0) puis calculer $f(x_0, y_0)$.
3. Etudier le signe du trinôme $4X^2 - 2X + 7$.
4. En remarquant que
$$4x^2 - 2xy + 7y^2 = y^2(4(\frac{x}{y})^2 - 2\frac{x}{y} + 7)$$
lorsque y n'est pas nul, montrer que $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Interpréter ce résultat.