Exercice 1
Déterminer les limites des suites suivantes

$$a_n = n^{22} - 8n^{21} + 17 \quad b_n = \frac{n^3 - n^2 + 1}{n^2 - n + 1} \quad c_n = 2n - \ln n \quad d_n = n^2 e^{-n}$$

$$e_n = \sqrt{n^2 + 1} - n \quad f_n = \frac{(\ln n)^{2004}}{n^{2003}} \quad g_n = \frac{3^n}{n^a}\ a \in \mathbb{R} \quad h_n = \frac{(n+2)!}{(2n^2+1) \times n!}$$

Exercice 2
Déterminer un équivalent des suites suivantes puis déterminer leurs limites

$$a_n = \frac{n^3 - n^2 + 1}{n^2 - n + 1} \quad b_n = (2n - \ln n)\ln(\frac{n+2}{n+1}) \quad c_n = \sqrt{n^3 + 1} - n$$

Exercice 3
On considère la suite u définie pour tout entier naturel n par $u_n = \dfrac{3^n}{n!}$

1. Montrer qu'il existe un entier N à partir duquel $u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2} u_n$
2. En déduire que pour tout $n \geqslant N$, $0 \leqslant u_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-N} u_N$. Conclure.

Exercice 4
On considère la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Montrer que $\forall\ n \geqslant 0$, $u_n > 0$ et déterminer ses limites éventuelles.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|u_{n+1} - 2| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - 2|$.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n, $|u_n - 2| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0 - 2|$. Conclure.

Exercice 5
Soit u la suite définie par $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{3u_n + 1}$ et $u_0 > 0$.

1. Montrer que $\forall\ n \geqslant 0, u_n$ existe et $u_n > 0$. En déduire la monotonie de u.
2. La suite est-elle convergente et calculer sa limite éventuelle ?
3. Montrer que $\forall\ n \geqslant 0$, $u_{n+1} \leqslant \dfrac{u_n}{3}$ puis que $\forall n \geqslant 0$, $u_n \leqslant (\dfrac{1}{3})^n u_0$.
   Retrouver ainsi le résultat de la question précédente.

Exercice 6
Soit u la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

1. Montrer que $\forall\ n \geqslant 0$, $u_n > 0$. Déterminer la monotonie de u et les limites éventuelles de u ?
2. Montrer que $\forall\ n \geqslant 0$, $u_{n+1}^2 - u_n^2 \geqslant 2$ puis calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(u_{k+1}^2 - u_k^2)$
   En déduire que $\forall\ n \geqslant 0$, $u_n \geqslant \sqrt{2n + u_0^2}$ et déterminer la limite de u.

Exercice 7
On considère une suite u positive telle que $\forall n \geqslant 0,\quad u_{n+2} \leqslant \dfrac{1}{3}u_{n+1} + \dfrac{1}{3}u_n$.
On introduit la suite v définie par $v_{n+2} = \dfrac{1}{3}v_{n+1} + \dfrac{1}{3}v_n$ avec $v_0 = u_0$ et $v_1 = u_1$

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0,\quad u_n \leqslant v_n$.
2. Déterminer la forme de la suite v.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 8
On définit deux suites a et b par $a_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $b_n = a_n + \dfrac{1}{n \times n!}$.
Montrer que ces deux suites sont adjacentes. Conclusion.

Exercice 9
Soit $(a_n)_n$ une suite décroissante qui converge vers 0 et $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$.
Montrer que les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes. En déduire que S converge.

Exercice 10
Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites u et v par
$u_0 = a$, $v_0 = b$ et $\forall n \geqslant 0$ $u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 0$, $0 < u_n < v_n$.
2. Montrer que la suite u est croissante et la suite v est décroissante
3. Démontrer que $\forall n \geqslant 0$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$
4. Déduire des questions précédentes que les deux suites convergent vers la même limite l..
5. Calcul de la limite de u. On note $l = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n$.
   (a) Déterminer la limite de la suite $(u_n v_n)$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n v_n)_n$ est constante et expliciter la constante.
   (c) En déduire la limite de u et v.