

Exercice 1

Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement 5 boules. Soit B le nombre de boules blanches et N le nombre de boules noires.

- On suppose que les tirages sont sans remise.
Déterminer la loi de B (resp. N) et calculer $E(B), V(B)$ (resp. $E(N), V(N)$).
- Refaire les questions précédentes lorsque les tirages sont avec remise.

Exercice 2

Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires.

- On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce obtenir la première boule blanche. Soit B le nombre de tirages nécessaires.
Expliciter la loi de B , son espérance et son écart-type.
- On tire les boules une à une sans les remettre jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une seule couleur dans l'urne. Soit X le nombre de tirages nécessaires.
Expliciter la loi de X , son espérance et son écart-type.
- Les variables B et X sont-elles indépendantes ?

Exercice 3

On considère une urne contenant 1 boule rouge, 2 boules noires et 3 boules jaunes. On effectue des tirages successifs jusqu'à ce qu'il ne reste plus dans l'urne que deux couleurs différentes. On note X la variable "nombre de tirage effectués".
Déterminer la loi de X . Calculer son espérance et sa variance.

Exercice 4

Un plateau est constitué de 25 cases. Derrière deux de ces cases se cache une bouteille de Champagne. On fixe un entier $n \in \llbracket 1, 25 \rrbracket$ et on retourne n cases au hasard. Soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles découvertes.
Déterminer la loi de probabilité de X_n ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 5

On lance n fois consécutives une pièce. La probabilité d'obtenir "pile" est p et celle d'obtenir "face" est $q = 1 - p$.

Pour tout entier naturel k , supérieur ou égal à 2, on dit que le $k^{\text{ième}}$ lancer est un changement s'il amène un résultat différent de celui du $(k - 1)^{\text{ième}}$ lancer.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de changements survenus durant les n premiers lancers.

- Donner la loi de X_2 .
- Donner la loi de X_3 . Vérifier que $E(X_3) = 4pq$ et que $V(X_3) = 2pq(3 - 8pq)$.
- Trouver la loi de X_4 . Calculer $E(X_4)$.

Exercice 6

On tire simultanément r jetons d'une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n ($r \leq n$). On note $X_{n,r}$ la variable égale au maximum des r numéros obtenus.

- Que représente $X_{5,4}$? Déterminer sa loi.
- Déterminer la loi de $X_{n,r}$ pour n et r quelconques avec $r \leq n$.

En déduire la valeur de $\sum_{k=r}^n C_n^{r-1}$.

Exercice 7

On tire, avec remise, cinq boules d'une urne contenant dix boules numérotés de 1 à 10. On note X la variable égale au maximum des deux numéros obtenus et Y la variable égale au minimum des cinq numéros obtenus.

- Déterminer soigneusement $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
- Calculer $P(X \leq k)$ pour $k \in X(\Omega)$ et $P(Y \geq k)$ pour $k \in Y(\Omega)$.
En déduire les lois de X et Y .
- Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 8

n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On effectue des tirages au hasard dans une urne contenant des boules numérotées de 1 à n . Un tirage consiste à extraire une boule de l'urne, la boule tirée étant ensuite remise dans l'urne. On note N la variable aléatoire égale au numéro du tirage au cours duquel, pour la première fois, on a obtenu une boule déjà obtenue auparavant.

- Vérifier que $N(\Omega) = \{2, n + 1\}$.
- Démontrer que : $\forall k \in \{1, n\}, P(N \geq k + 1) = \frac{A_n^k}{n^k}$.
- En déduire $P(N = k)$ (on distinguera les cas $k \leq n$ et $k = n + 1$).

- Montrer que l'espérance $E(N) = \sum_{k=0}^n \frac{A_n^k}{n^k}$.