Exercice 1
Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 2x+y+z=-5 \\ 2x+13y-7z=-1 \\ x-y+z=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y+2z=1 \\ 4x-y+3z=-1 \\ 2x+5y+z=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+3y-z+t &=1 \\ 2x+13-7z+2t &=2 \\ x-y+z+t &=0 \\ x+7y-4z+t &=-1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} y+z+t=-1 \\ x+z+t=0 \\ x+y+t=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x+y=2 &=2 \\ x+2y=1 &=1 \\ x+y=1 &=1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} u+w=1 \\ v+w=0 \\ u+v=12 \\ u+3v=0 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x+y+z+t=-5 \\ 2x+3y-3z+t=-1 \\ x-y+z-t=1 \end{cases}$

Exercice 2

1. On considère le système (E_λ) : $\begin{cases} (1-\lambda)x+y+z=0 \\ x+(1-\lambda)y+z=0 \\ x+y+(1-\lambda)z=0 \end{cases}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
   (a) Pour quelles valeurs de λ, le système (E_λ) est-il de Cramer ?
   (b) Résoudre le système selon les valeurs de λ
2. Mêmes questions avec les systèmes suivants

$$(F_\lambda) : \begin{cases} (1-\lambda)x-3y+6z=0 \\ 6x-(8+\lambda)y+12z=0 \\ 3x-3y+(4-\lambda)z=0 \end{cases} \quad (G_\lambda) : \begin{cases} -\lambda x+2y+2z=0 \\ 2x-\lambda y-z=0 \\ -x-y-\lambda z=0 \end{cases}$$

Exercice 3
Calculer les produits LC et CL où $L = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 4
Soient $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Développer et simplifier

$$S = (2A)(3B) - (A+2B)^2 + (A-B)(A+B)$$

Exercice 5
Déterminer toutes les matrices $B \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} B = B \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 6
Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$ où $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$.

Exercice 7
Montrer que $\forall n \geqslant 1, \quad J^n = 4^{n-1}J$ où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 8
Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I$.
Calculer B^2 puis montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad A^n = 2^n Id + n2^{n-1}B$.

Exercice 9
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2. Expliciter α et β tel que $A^2 = \alpha A + \beta Id$
2. Montrer par récurrence qu'il existe a_n et b_n tels $A^n = a_n A + b_n Id$
3. Expliciter a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
4. Expliciter a_n en fonction de n.
5. Calculer de deux façons distinctes $\sum_{k=0}^{n-1}(b_{k+1} - b_k)$.
   En déduire l'expression de b_n.
6. Déterminer tous les coefficients de la matrice A^n

Exercice 10
On considère la matrice A définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & 1+a_n \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que la suite a est arithmético-géométrique.
3. En déduire a_n en fonction de n puis donner l'expression A^n en fonction de n