Exercice 1
Montrer que $\forall x \geqslant 1, \quad \ln x \leqslant 2\sqrt{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

Exercice 2
On considère la fonction $h(x) = (x-1)\ln(1-\dfrac{1}{x})$.

1. Déterminer son domaine de définition.
2. Démontrer que $\forall x \in]0,1[, \quad -\dfrac{x}{1-x} \leqslant \ln(1-x) < -x$. En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$.
3. A l'aide du changement de variable $X = x-1$, déterminer $\lim\limits_{x\to1^+} h(x)$.
4. Dresser son tableau de variation sur $]1,+\infty[$.

Exercice 3
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ xe^x + 1 \geqslant e^x \geqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$
puis que $\forall x \in \mathbb{R}_-,\ 1 + x \leqslant e^x \leqslant 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.
En déduire $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{e^x-1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{e^x-1}{x}$ puis $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x}$.

Exercice 4
On pose $f(x) = 1 + x\exp(\dfrac{1}{1-x})$.

1. Calculer les limites gauche et droite en 1 de f. Possède-t-elle une limite en 1 ?
2. Déterminer ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
3. A l'aide d'un changement de variable convenable, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\exp(\dfrac{1}{1-x})-1)$
4. Déterminer les asymptotes à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$.

Exercice 5
Compléter les équivalents suivants :

a) $x\ln(1+\dfrac{1}{x}) \underset{x\to+\infty}{\sim}$ b) $\sqrt{e^{2x}+e^x+1}+e^x \underset{x\to+\infty}{\sim}$ c) $\ln(e^x+e^{-x}) \underset{x\to+\infty}{\sim}$
d) $x\ln(1+\dfrac{1}{\sqrt{x}}) \underset{x\to0^+}{\sim}$ e) $\sqrt{e^{2x}+e^x+1}-e^x \underset{x\to-\infty}{\sim}$ f) $\sqrt{e^{2x}+e^x+1}-e^x \underset{x\to+\infty}{\sim}$

Exercice 6
Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{a}{x})^x,\quad \lim_{x\to0}(1+\frac{1}{x^2})^x,\quad \lim_{x\to+\infty}(2^x+3^x)^{1/x},\quad \lim_{x\to-\infty}(2^x+3^x)^{1/x}$$

Exercice 7
Soient a et x deux nombres réels et n un entier positif non nul.

1. Montrer que $x^n - a^n = (x-a)\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-1-k}$. En déduire $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^n-a^n}{x-a}$.
2. Retrouver ainsi que la fonction $x \mapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter sa dérivée.

Exercice 8
Déterminer les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x\to3}\frac{\ln x-\ln 3}{x-3}\quad b)\ \lim_{x\to2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}\quad c)\ \lim_{x\to1}\frac{e^x-e}{x-1}\quad d)\ \lim_{x\to-1}\frac{x^{2003}+1}{x+1}.$$

puis compléter les équivalents suivants :

$a)\ \ln x - \ln 3 \underset{x\to3}{\sim}$ $\quad b)\ \sqrt{x+2}-2 \underset{x\to2}{\sim}$ $\quad c)\ e^x - e \underset{x\to1}{\sim}$ $\quad d)\ x^{2003}+1 \underset{x\to-1}{\sim}$

Exercice 9
Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont continues en 0 ? Parmi celles qui sont continues en 0, lesquelles sont dérivables en 0 ? Dans ce cas, calculer la dérivée en 0.

$$a(x) = \begin{cases} x^2\ln x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad b(x) = \begin{cases} x\ln x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$c(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2+1}\exp(-\dfrac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad d(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 10
On considère la fonction $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

1. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{-x}$. Expliciter a_n
3. Vérifier que la suite $c_n = (-1)^n b_n$ est arithmétique. En déduire b_n.

Exercice 11
Soit a un nombre réel.

1. Montrer que la fonction $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}n!}{(x-a)^n}$.
3. On considère la fonction $g(x) = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
   Expliciter trois réels α, β et γ tels que $g(x) = \dfrac{\alpha}{x} + \dfrac{\beta}{x+1} + \dfrac{\gamma}{x+2}$.
   Montrer que g est de classe C^∞ sur son domaine de définition et calculer $g^{(n)}(x)$.