Exercice 1
Une urne contient des jetons numérotés de 1 à 4. On effectue trois tirages successifs. Chaque tirage consiste à prendre un jeton dans l'urne, noter son numéro, puis remettre le jeton dans l'urne.
Pour tout entier i compris entre 1 et 4, on définit les variables aléatoires F_i et X_i comme suit :
F_i est le nombre de fois où le jeton $n^\circ\ i$ a été tiré.
X_i prend la valeur 0 si le jeton $n^\circ\ i$ n'a pas été tiré et prend la valeur 1 si il a été tiré au moins une fois au cours des trois tirages successifs.

1. **Etude des variables aléatoires X_i.**
   (a) Pour tout i compris entre 1 et 4, déterminer la loi puis l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_i.
   (b) Soient i et j deux entiers distincts compris entre 1 et 4.
   Déterminer la probabilité pour que simultanément $X_i = 0$ et $X_j = 0$.
   Est-ce que les variable X_i et X_j sont indépendantes ?
   (c) Déterminer l'espérance de X.
2. **Etude des variables aléatoires F_i.**
   (a) Pour tout i compris entre 1 et 4, déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire F_i.
   (b) On considère la variable aléatoire $F = \sum_{i=1}^{4} F_i$.
   Que représente F ? En déduire l'espérance et la variance de F.
   (c) Calculer $\sum_{i=1}^{4} V(F_i)$.
   (d) Est-ce que les variables aléatoires F_i sont deux à deux indépendantes ?

Exercice 2
Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $X \sim U(\|5, 10\|)$.

Exercice 3
Une urne contient dix boules rouges et cinq boules vertes. On pioche simultanément six boules et on note R (resp. V) le nombre de boules rouges (resp. vertes) obtenues.
Déterminer la loi et l'espérance de R (resp. V).

Exercice 4
On choisit au hasard un groupe d'élèves parmi les n élèves d'une classe (on peut ne prendre aucun élève, en choisir un ou plusieurs). Soit X la variable aléatoire discrète égale au nombre d'élèves choisis.
Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 5
Un service après-vente dispose d'équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique. Les appels se produisent de façon indépendante, et la probabilité qu'un retard se produise dans le dépannage à la suite d'un appel est $p = \frac{1}{4}$.

1. Un même client a appelé le service à 8 dates différentes. Soit X le nombre de retards que ce client a subi.
   Définir la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. On considère un ensemble de 8 clients différents. 2 d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont subi un retard. On contacte 4 clients parmi les 8. Soit M le nombre de clients mécontents parmi les 4 contactés.
   Définir la loi de M. La donner explicitement. Calculer $E(M)$.

Exercice 6
Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement 5 boules avec remise. S'il tire une boule blanche, il gagne 2 points, sinon il en perd 3. Soit X le nombre de boules blanches et Y le nombre de points obtenus.

1. (a) Déterminer la loi de X, puis $E(X)$ et $V(X)$.
   (b) Exprimer Y en fonction de X.
   (c) En déduire la loi de Y, puis $E(Y)$ et $V(Y)$.
2. Mêmes questions qu'au 1 si l'on supose que le jeu est sans remise.

Exercice 7
Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0, 1, 2, \ldots, n$, de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut. Au départ, elle est sur la case 0. Soit X_n la variable aléatoire égale au numéro de la case occupée par la puce après n sauts.

1. Déterminer la loi de X_n.
2. On appelle Y_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts.
   Déterminer X_n en fonction de Y_n et en déduire $E(X_n)$ et $V(X_n)$.
3. Expliciter la loi de Y_3 puis celle de Y_n.