Exercice 1
Calculer les intégrales suivantes
$A = \int_{\sqrt{3}}^{2\sqrt{2}} \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$, $B = \int_{2}^{-2} t.\exp(-t^2)dt$, $C = \int_{0}^{-2} t.\exp(-t^2)dt$, $D = \int_{1}^{e} \frac{\ln(t)}{t^2}dt$,
$E = \int_{1}^{e^2} (x^3+1)\ln(x)dx$, $F = \int_{0}^{1} (x^2+x+1)e^{-x}dx$, $G = \int_{-3}^{3} x\sqrt{x^4+1}$

Exercice 2
A l'aide de changement de variables indiqués, calculer les intégrales suivantes :
$A = \int_{1/2}^{1} \frac{1}{x(x+1)} \ln(\frac{x}{x+1})dx$ $(t = \frac{x}{x+1})$ pour les suivantes $(t = x^2+1)$
$B = \int_{0}^{3} \frac{x.\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx$, $C = \int_{-1}^{0} \frac{x^3dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

Exercice 3
On pose $f(x) = x+1+e^{-x}$. Tracer $\mathcal{C}_f$. Pour $a>0$, calculer l'aire du domaine plan $D_a = \{M(x,y); 0 \leqslant x \leqslant a \text{ et } x+1 \leqslant y \leqslant f(x)\}$. Déterminer la limite de cette aire quand a tend vers $+\infty$.

Exercice 4
On pose pour tout entier naturel non nul n : $I_n = \int_{1}^{e} (\ln(x))^n dx$, et $I_0 = e-1$.

1. Donner la monotonie de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ et montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad I_n \geqslant 0$.
2. Etablir, pour tout entier naturel n : $I_{n+1} = e-(n+1)I_n$.
3. Déduire des questions précédentes que $\forall n \geqslant 0 \quad : 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1}$.
4. Quelle est la limite de la suite $(I_n)_{n\in N}$?
5. A l'aide de la question 2, montrer que : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{n}$.

Exercice 5
On pose, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{n!}\int_{0}^{1} (1-t)^n e^t dt$.

1. Calculer I_0, I_1 et I_2.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n!}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_n = I_{n-1} - \frac{1}{n!}$.
4. Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad I_n = e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

Exercice 6
$\forall n \geqslant 1$, on note $I_n = \int_{0}^{1} \frac{t^n}{1+t^2}dt$ et $J_n = \int_{0}^{1} t^n \ln(1+t^2)dt$.

1. Calculer I_1 et J_1 et donner la monotonie des suites $(I_n)_{n\geqslant 0}$ et $(J_n)_{n\geqslant 0}$.
2. Montrer que $\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que, $J_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1}I_{n+2}$.
4. En déduire la convergence de la suite (J_n) et donner un équivalent simple de J_n en $+\infty$.

Exercice 7
m et n étant deux entiers naturels quelconques, on pose : $I_{m,n} = \int_{0}^{1} x^m(1-x)^n dx$.

1. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour $m \geqslant 1$, on a : $I_{m,n} = \frac{m}{n+1}I_{m-1,n+1}$.
2. Calculer $I_{0,m+n}$ et en déduire la valeur de $I_{m,n}$ pour tout couple d'entiers naturels m et n.
3. Calculer, pour tout entier naturel n, $I_{n,n}$.
4. Etudier la fonction $x \mapsto x-x^2$ sur l'intervalle $[0,1]$.
   En déduire que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n,n} \leqslant \frac{1}{4^n}$.

Exercice 8
Expliciter le théorème sur les sommes de Riemann aux fonctions suivantes
a) $a(x) = \frac{1}{x}$, $I = [1,2]$ b) $b(x) = e^x$, $I = [0,1]$ c) $c(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $I = [0,1]$

Exercice 9
Calculer les limites suivantes

1. $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{n+k}$ (changement de variable $t = \sqrt{x}$ pour l'intégrale)
2. $M = \lim\limits_{n\to+\infty} n\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+n}{k^2+kn+n^2}$