Exercice 1

Soit $F(x) = \int_5^x \sqrt{t^2 - 3t + 2}dt$.

1. Donner le domaine de définition de F.
2. Quelles sont les variations de F sur $\mathcal{D}_F$?
3. Montrer que $\forall t \geqslant 2, \quad \sqrt{t^2 - 3t + 2} \geqslant t - 2$.
4. En déduire une minoration de F et calculer $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.
5. Montrer que F déterminer une bijection de $\mathcal{D}_F$ sur un intervalle à expliciter.
6. Justifier que $\forall t \geqslant 2, \quad \sqrt{t^2 - 3t + 2} \leqslant t$ puis en déduire un encadrement de F.
7. Donner un équivalent de F en $+\infty$.

Exercice 2

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \int_x^{2x} \exp(-t^2)dt$.

1. Etudier la parité de f.
2. Déterminer le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.
3. Donner un encadrement de $f(x)$ lorsque $x \geqslant 0$. Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Montrer que f est dérivable et que $f'(x) = 2.\exp(-4x^2) - \exp(-x^2)$.
5. Etudier la variation de f. Construire $\mathcal{C}_f$ (on admettra que le maximum de f est sensiblement égal à $0,3$).

Exercice 3

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$.

1. Donner le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ et calculer $f'(x)$.
3. Montrer qu'il existe un unique réel α appartenant à $\mathbb{R}_+^\times$ tel que $f'(\alpha) = 0$.
4. Montre que pour tout réel x strictement positif,
$$e^{-x^2} \int_x^{x^2} \frac{dt}{t} \leqslant f(x) \leqslant e^{-x^4} \int_x^{x^2} \frac{dt}{t}.$$
En déduire que f admet une limite quand $x \to +\infty$. f possède-t-elle une limite en 0 ?
5. Dresser le tableau de variation de f.Donner l'allure de la courbe associée à f.

Exercice 4

Soit f définie par $f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1 + t^2)}$.

1. Montrer que f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^\times$ et donner la parité de f.
2. Calculer f' sur $]0, +\infty[$ et déterminer le signe de $f'(x)$ lorsque $x > 0$.
3. Donner un encadrement de $t \mapsto \frac{1}{\ln(1 + t^2)}$ sur $[x, 2x]$ lorsque $x > 0$. En déduire $\lim_{x \to 0^+} f$ et $\lim_{x \to +\infty} f$.
4. Montrer que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{x}{2 \ln x}$.
5. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^\times$ et construire $\mathcal{C}_f$.

Exercice 5

Soit $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{t \ln t}$.

1. Donner le domaine de définition de f puis justifier que f est dérivable sur son domaine de définition.
2. Calculer f'. Qu'en conclure ?
3. Donner un encadrement de f sur $]1, +\infty[$. En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ puis la valeur de f sur cet intervalle.
4. A l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{t}$, exprimer $f(\frac{1}{x})$ en fonction de $f(x)$. En déduire f sur $]0, 1[$?