correction de l'exercice 1
Il est immédiat que :

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$$
$$\sum_{j=3}^{8} \frac{j^2}{3^j} = \frac{3^2}{3^3} + \frac{4^2}{3^4} + \frac{5^2}{3^5} + \frac{6^2}{3^6} + \frac{7^2}{3^7} + \frac{8^2}{3^8}$$
$$\sum_{n=1}^{5} (-1)^{n^2} \frac{x^{2n+4}}{n} = (-1)^{1^2} \frac{x^{2\times 1+4}}{1} + (-1)^{2^2} \frac{x^{2\times 2+4}}{2} + (-1)^{3^2} \frac{x^{2\times 3+4}}{3} + (-1)^{4^2} \frac{x^{2\times 4+4}}{4} + (-1)^{5^2} \frac{x^{2\times 5+4}}{5}$$
$$\sum_{p=3}^{5} x(1-x^2)^p = x(1-x^2)^3 + x(1-x^2)^4 + x(1-x^2)^5$$
$$\sum_{s=2}^{s=8} \frac{s^2+s+1}{s^2+1} = \frac{2^2+2+1}{2^2+1} + \frac{3^2+3+1}{3^2+1} + \frac{4^2+4+1}{4^2+1} + \frac{5^2+5+1}{5^2+1} + \frac{6^2+6+1}{6^2+1} + \frac{7^2+7+1}{7^2+1} + \frac{8^2+8+1}{8^2+1}$$

correction de l'exercice 2

1. On constate que la seule expression variable est la base de la puissance $(2, 3, .., n)$ et qu'elle prend toutes les valeurs entières entre 2 et n donc on a
$$2^5 + 3^5 + 4^5 + \cdots + n^5 = \sum_{k=2}^{5} k^5$$
2. On constate qu'il y a deux variations : celle du signe et celle de l'exposant. En se rapellant que $a^0 = 1$, on voit que l'exposant prend toutes les valeurs entières entre 0 et n. D'autre part, la suite $(-1)^k$ est une suite qui permet aisément d'alterner le signe puisque $(-1)^0 = 1$, $(-1)^1 = -1$, $(-1)^2$, ... donc on a
$$1 - a + a^2 - a^3 + \cdots + (-1)^n a^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a^k$$
3. On constate qu'une seule expression est variable : l'exposant et le dénominateur. Il prend que les valeurs paires donc les valeurs de la forme $2k$. Puisque $2k = 2 \Leftrightarrow k = 1$ et $2k = 2n \Leftrightarrow k = n$, on obtient que
$$\frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{4} + \frac{a^6}{6} + \cdots + \frac{a^{2n}}{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{a^{2k}}{2k}$$
4. On constate qu'il y a trois expressions variables : le signe, le numérateur et le dénominateur.
En outre, le numérateur prend toutes les valeurs entières entre 1 et n et le dénominateur étant toujours égal au numérateur auquel on a ajouté 1, on est tenté de considérer l'expression $(-1)^k \frac{k}{k+1}$. Lorsque $k = 1$,
$$(-1)^k \frac{k}{k+1} = (-1)^1 \frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$
donc on n'a pas le bon signe. Il suffit de faire une petite modification en considérant $(-1)^{k+1} \frac{k}{k+1}$. Dans ce cas, lorsque $k = 1$, on a
$$(-1)^{k+1} \frac{k}{k+1} = (-1)^{1+1} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$
lorsque $k = 2$, on a
$$(-1)^{k+1} \frac{k}{k+1} = (-1)^{2+1} \frac{2}{2+1} = -\frac{2}{3}$$
et lorsque $k = n$, on a
$$(-1)^{k+1} \frac{k}{k+1} = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$$
Clairement, la formule est alors
$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{k}{k+1}$$
Remarque : on aurait pu considérer également que la variable k est le dénominateur. Il prend ses valeurs parmi les entiers compris entre 2 et $n+1$ et l'on a la formule
$$\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{4} - \frac{4}{5} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{n}{n+1} = \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k \frac{k-1}{k}$$
On verra ensuite que les deux formules sont équivalentes par changement de variable.

5. Il suffit simplement de remarquer que
$$\ln(1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n) = \ln(1) + \ln(2) + \cdots + \ln(n) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k)$$

6. On constate qu'il y a deux expressions variables : l'exposant et de dénominateur. Puisque $2^0 = 1$, on voit que l'exposant prend toutes les valeurs entre 0 et 2003 et que le dénominateur est égal à l'exposant auquel on ajoute 1. L'expression $\dfrac{2^k}{k+1}$ est un bon candidat et l'on vérifie aisément que
$$\frac{2^0}{0+1} = \frac{1}{1}, \quad \frac{2^1}{1+1} = \frac{2}{2}, \quad \frac{2^2}{2+1} = \frac{2^2}{3}, \ldots, \frac{2^{2003}}{2003+1} = \frac{2^{2003}}{2004}$$
donc on a la formule
$$\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{4} + .. + \frac{2^{2003}}{2004} = \sum_{k=0}^{2003} \frac{2^k}{k+1}$$
Remarque : On aurait également pu choisir comme variable le dénominateur. Celui ci varie parmi tous les entiers compris entre 1 *et* 2004, *l'exposant étant égal au dénominateur auquel on retranche* 1 *et l'on constate aisément que*
$$\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{2^2}{3} + \frac{2^3}{4} + .. + \frac{2^{2003}}{2004} = \sum_{k=1}^{2004} \frac{2^{k-1}}{k}$$
On verra ensuite que les deux formules sont équivalentes par changement de variable.

correction de l'exercice 3

<u>A_n</u> : Par linéarité du symbole de sommation, on a
$$A_n = 2\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + \sum_{k=0}^{n} 1 = 2 \times \frac{n(n+1)}{2} + (n-0+1) = n(n+1) + (n+1) = (n+1)[n+1] = (n+1)^2$$

<u>B_n</u> : Par linéarité du symbole de sommation, on a
$$\begin{aligned} B_n &= 6\sum_{k=0}^{n+1} k^2 + 4\sum_{k=0}^{n+1} k + \sum_{k=0}^{n+1} 1 = 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 4\frac{(n+1)[(n+1)+1]}{2} + (n+1-0+1) \times 1 \\ &= n(n+1)(2n+1) + 2(n+1)(n+2) + (n+2) = 2n^3 + 5n^2 + 8n + 6 \end{aligned}$$

<u>C_n</u> :
$$C = \sum_{p=945}^{2004} 3 = 3 \times (2004 - 945 + 1) = 3180$$

<u>D_n</u> : En développant le produit sous la symbole de sommation et en utilisant la linéarité de celui-ci, on a
$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{k=1}^{2n} k(2k-1)(k+1) = \sum_{k=1}^{2n} 2k^3 + k^2 - k = 2\sum_{k=1}^{2n} k^3 + \sum_{k=1}^{2n} k^2 - \sum_{k=1}^{2n} k = 2\sum_{k=0}^{2n} k^3 + \sum_{k=0}^{2n} k^2 - \sum_{k=0}^{2n} k \quad (0^3 = 0^2 = 0) \\ &= 2\left[\frac{(2n)(2n+1)}{2}\right]^2 + \frac{(2n)(2n+1)(2(2n)+1)}{6} - \frac{(2n)(2n+1)}{2} \\ &= (2n)(2n+1)\left[\frac{(2n)(2n+1)}{2} + \frac{4n+1}{6} - \frac{1}{2}\right] = (2n)(2n+1)\left(2n^2 + \frac{5}{3}n - \frac{1}{3}\right) = 8n^4 + \frac{32}{3}n^3 + 2n^2 - \frac{2}{3}n \end{aligned}$$

correction de l'exercice 4

<u>A</u> :
$$A = \sum_{k=2}^{2004}(3k+2) = 3\sum_{k=2}^{2004} k + \sum_{k=2}^{2004} 2 = 3\left[\left(\sum_{k=0}^{2004} k\right) - 1 - 0\right] + 2 \times (2004 - 2 + 1) = 3\left[\frac{2004 \times 2005}{2} - 1\right] + 2 \times 2003 = 6031\,033$$

<u>B</u> :
$$\begin{aligned} B &= \sum_{k=4}^{1000}(8k-3) = 8\left[\sum_{k=4}^{1000} k\right] - \sum_{k=4}^{1000} 3 = 8\left[\left(\sum_{k=0}^{1000} k\right) - 3 - 2 - 1 - 0\right] - 3 \times (1000 - 1 + 1) \\ &= 8\left[\frac{1000 \times 1001}{2} - 6\right] - 3000 = 4000\,952 \end{aligned}$$

$\underline{C}$:

$$C=\sum_{j=3}^{50}(3j^2+1)=3\sum_{j=3}^{50}j^2+\sum_{j=3}^{50}1=3\left[\frac{50\times(50+1)(2\times 50+1)}{6}\right]+(50-3+1)\times 1=128\,823$$

$\underline{D}$: Il est immédiat qu'il va falloir développer l'expression sous le symbole somme. Etant donné que les termes correspondants à $i=0$, $i=1$ et $i=2$ sont nuls, on a

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=3}^{101}i(i-1)(i-2)=\sum_{i=0}^{101}x(x-1)(x-2)=\sum_{i=0}^{101}\left(i^3-3i^2+2i\right)=\sum_{i=0}^{101}i^3-3\sum_{i=0}^{101}i^2+2\sum_{i=0}^{101}i \\ &= \left[\frac{101\times(101+1)}{2}\right]^2-3\times\frac{101\times(101+1)(2\times 101+1)}{6}+2\times\frac{101\times(101+1)}{2} \\ &= 101\times(101+1)\left[\frac{101\times(101+1)}{2}-\frac{203}{2}+1\right]=52\,030\,251 \end{aligned}$$

correction de l'exercice 5

$\underline{A_n}$: Ce n'est pas en l'état une somme de suite géométrique (l'exposant doit croître d'une unité seulement entre deux termes consécutifs, $a^n+a^{n+1}+\cdots$). On doit donc transformer cette écriture en utilisant les règles de calcul sur les puissances

$$A_n=1+2^2+(2^2)^2+(2^2)^3+\cdots+(2^2)^n=\sum_{k=0}^{n}(2^2)^k\underset{2^2\neq 1}{=}\frac{1-(2^2)^{n+1}}{1-2}=(2^2)^{n+1}-1=2^{2n+2}-1$$

$\underline{B_n}$:

$$B_n=1-3+3^2-3^3+\cdots+(-1)^n3^n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k3^k=\sum_{k=0}^{n}(-3)^k\underset{-3\neq 1}{=}\frac{1-(-3)^{n+1}}{1-(-3)}=\frac{1-(-3)^{n+1}}{4}$$

$\underline{C_n}$: La somme C_n est bien une somme de termes géométriques de raison 3. En factorisant par le premier terme, on a

$$C_n=2.3^2+2.3^3+2.3^4+\cdots+2.3^n=2.3^2\left[1+3+3^2+\cdots+3^{n-2}\right]\underset{3\neq 1}{=}2.3^2\times\frac{1-3^{(n-2)+1}}{1-3}=2.3^2\times\frac{3^{n-1}-1}{2}=9(3^{n-1}-1)$$

$\underline{D_n}$: Pour la somme D_n, on procède comme pour la somme C_n

$$\begin{aligned} D_n &= -7^2+7^3-7^4+\cdots+7^{2003}-7^{2004}+7^{2005}=-7^2\left[1-7+7^2+\cdots-7^{2001}+7^{2002}-7^{2003}\right] \\ &= -7^2\sum_{k=0}^{2003}(-7)^k\underset{-7\neq 1}{=}-7^2\times\frac{1-(-7)^{2003+1}}{1-(-7)}=7^2\times\frac{(-7)^{2004}-1}{8}=7^2\times\frac{7^{2004}-1}{8} \end{aligned}$$

correction de l'exercice 6

$\underline{A_n}$:

$$A_n=\sum_{\alpha=0}^{n}\frac{3}{10^\alpha}=3\sum_{\alpha=0}^{n}\frac{1}{10^\alpha}=3\sum_{\alpha=0}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^\alpha\underset{1/10\neq 1}{=}3\times\frac{1-\left(\frac{1}{10}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{10}}=3\times\frac{1-\frac{1}{10^{n+1}}}{\frac{9}{10}}=3\times\frac{10}{9}\left(1-\frac{1}{10^{n+1}}\right)=\frac{10}{3}\left(1-\frac{1}{10^{n+1}}\right)$$

$\underline{B_n}$:

$$B_n=\sum_{i=0}^{2n}3\times 4^{i+1}=\sum_{i=0}^{2n}3\times 4\times 4^i=3\times 4\sum_{i=0}^{2n}4^i\underset{12\neq 1}{=}3\times 4\times\frac{1-4^{2n+1}}{1-4}=3\times 4\times\frac{4^{2n+1}-1}{3}=4(4^{2n+1}-1)$$

$\underline{C_n}$:

$$C_n=\sum_{j=0}^{n}\frac{5\times 2^j}{3^{j+1}}=\sum_{j=0}^{n}\frac{5}{3}\times\frac{2^j}{3^j}=\frac{5}{3}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^j\underset{2/3\neq 1}{=}\frac{5}{3}\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{5}{3}\times\frac{3}{1}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]=5\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$\underline{D_n}$:

$$D_N=\sum_{i=0}^{N+1}3^{2i+1}=\sum_{i=0}^{N+1}(3^2)^i\times 3=3\sum_{i=0}^{N+1}9^i\underset{9\neq 1}{=}3\times\frac{1-9^{(N+1)+1}}{1-9}=\frac{3}{8}\left(9^{N+2}-1\right)$$

$\underline{E_r}$:

$$E_r = \sum_{k=0}^{3r} \frac{2^{2k}}{3^{4k}} = \sum_{k=0}^{3r} \frac{(2^2)^k}{(3^4)^k} = \sum_{k=0}^{3r} \left(\frac{4}{81}\right)^k \underset{4/81\neq 1}{=} \frac{1-\left(\frac{4}{81}\right)^{(3r)+1}}{1-\frac{4}{81}} = \frac{81}{77}\left(1-\left(\frac{4}{81}\right)^{3r+1}\right)$$

$\underline{F_k}$:

$$\begin{aligned} F_k &= \sum_{s=0}^{k} \frac{2^{3s-1}}{3^{2s+2}} = \sum_{s=0}^{k} \frac{(2^3)^s \times 2^{-1}}{(3^2)^s \times 3^2} = \frac{2^{-1}}{3^2}\sum_{s=0}^{k}\left(\frac{2^3}{3^2}\right)^s = \frac{1}{18}\sum_{s=0}^{k}\left(\frac{8}{9}\right)^s \underset{8/9\neq 1}{=} \frac{1}{18} \times \frac{1-\left(\frac{8}{9}\right)^{k+1}}{1-\frac{8}{9}} \\ &= \frac{1}{18} \times \frac{9}{1}\left[1-\left(\frac{8}{9}\right)^{k+1}\right] = \frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{8}{9}\right)^{k+1}\right] \end{aligned}$$

$\underline{G_s}$:

$$\begin{aligned} G_s &= \sum_{m=0}^{3s} \frac{2}{5^{3m+2}} = \sum_{m=0}^{3s} \frac{2}{(5^3)^m \times 5^2} = \frac{2}{5^2}\sum_{m=0}^{3s}\left(\frac{1}{5^3}\right)^m \underset{1/125\neq 1}{=} \frac{2}{25} \times \frac{1-\left(\frac{1}{5^3}\right)^{(3s)+1}}{1-\frac{1}{5^3}} = \frac{2}{25} \times \frac{125}{124}\left[1-\left(\frac{1}{5^3}\right)^{(3s)+1}\right] \\ &= \frac{5}{62}\left[1-\frac{1}{5^{3(3s+1)}}\right] = \frac{5}{62}\left[1-\frac{1}{5^{9s+3}}\right] \end{aligned}$$

$\underline{K_l}$:

$$K_l = \sum_{p=0}^{2l+1} x(1-x^2)^{p+1} = \sum_{p=0}^{2l+1} x(1-x^2)(1-x^2)^p = x(1-x^2)\sum_{p=0}^{2l+1}(1-x^2)^p$$

Premier cas $1-x^2 \neq 1 \Leftrightarrow x^2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ alors

$$K_l = x(1-x^2) \times \frac{1-(1-x^2)^{(2l+1)+1}}{1-(1-x^2)} = x(1-x)^2 \times \frac{1-(1-x^2)^{2l+2}}{x^2} = \frac{1-x^2}{x}\left[1-(1-x^2)^{2l+2}\right]$$

Deuxième cas $1-x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ alors $K_l = 0$.

correction de l'exercice 7

$\underline{A_n}$:

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{p=2}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^p = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^2\left[1+\left(\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right] \\ &= \frac{1}{9}\sum_{p=0}^{n-2}\left(\frac{1}{3}\right)^p \underset{1/3\neq 1}{=} \frac{1}{9} \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{(n-2)+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{9} \times \frac{3}{2}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] = \frac{1}{6}\left[1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] \end{aligned}$$

$\underline{B_n}$:

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=3}^{n+1} \frac{2^k}{3^{k+2}} = \sum_{k=3}^{n+1} \frac{2^k}{3^k \times 3^2} = \frac{1}{3^2}\sum_{k=3}^{n+1}\frac{2^k}{3^k} = \frac{1}{3^2}\sum_{k=3}^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{3^2}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] \\ &= \frac{1}{3^2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3\left[1+\left(\frac{2}{3}\right)^1+\cdots+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right] = \frac{2^3}{3^5}\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{2}{3}\right)^k \underset{2/3\neq 1}{=} \frac{2^2}{3^5} \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{(n-2)+1}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2^2}{3^4}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] \end{aligned}$$

$\underline{C_N}$:

$$\begin{aligned} C_N &= \sum_{n=1}^{N}\left(5 \times 2^n + 2 \times 3^{2n}\right) = 5\sum_{n=1}^{N} 2^n + 2\sum_{n=1}^{N}(3^2)^n = 5\left[2+2^2 1+\cdots+2^N\right] + 2\left[3^2+(3^2)^2+\cdots+(3^2)^N\right] \\ &= 5 \times 2\left[1+2+\cdots+2^{N-1}\right] + 2 \times 3^2\left[1+(3^2)+\cdots+(3^2)^{N-1}\right] = 10 \times \frac{1-2^{(N-1)+1}}{1-2} + 18 \times \frac{1-(3^2)^{(N-1)+1}}{1-3^2} \\ &= 10\left[2^N-1\right] + \frac{18}{8}\left[9^N-1\right] = 10\left[2^N-1\right] + \frac{9}{4}\left[9^N-1\right] = 10 \times 2^N + \frac{9^{N+1}}{4} - \frac{49}{4} \end{aligned}$$

D_k :

$$\begin{aligned}
D_k &= \sum_{n=3}^{2k} 2^{3n+1} \times \frac{3^{n+1}}{4^n} = \sum_{n=3}^{2k} 2 \times 3 \times \frac{(2^3)^n \times 3^n}{4^n} = 6\sum_{n=3}^{2k}\left(\frac{2^3 \times 3}{4}\right)^n = 6\sum_{n=3}^{2k} 6^n = 6\left[6^3 + 6^4 + \cdots + 6^{2k}\right] \\
&= 6 \times 6^3\left[1 + 6 + \cdots + 6^{2k-3}\right] = 6^4 \times \frac{1 - 6^{(2k-3)+1}}{1-6} = \frac{6^4}{5}\left[6^{2k-2} - 1\right]
\end{aligned}$$

correction de l'exercice 8

La suite u est arithmético-géométrique car elle vérifie

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}$$

On commence par rechercher la suite constante vérifiant l'égalité ci-dessus

$$L = \frac{2}{3}L + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3}L = \frac{1}{3} \Leftrightarrow L = 1$$

On introduit alors la suite v définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - 1$ est géométrique car

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3} - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}(u_n - 1) = \frac{2}{3}v_n$$

Ainsi, on peut expliciter la suite v donc la suite u puis la somme

$$\begin{aligned}
v_n &= \left(\frac{2}{3}\right)^n v_0 \Leftrightarrow u_n - 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - 1) \Leftrightarrow u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - 1) + 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \\
\sum_{k=0}^{n} u_k &= \sum_{k=0}^{n}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n (u_0 - 1) + 1\right] = (u_0 - 1)\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{k=0}^{n} 1 = (u_0 - 1) \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} + (n - 0 + 1) \times 1 \\
&= \frac{3(u_0 - 1)}{2}\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right] + n + 1
\end{aligned}$$

correction de l'exercice 9

La suite u est réccurente linéaire d'ordre 2 et l'on connait les conditions initiales u_0, u_1 donc on peut expliciter u_n en fonction de n. Pour cela, on commence par expliciter les solutions de l'équation caractéristique

$$3x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2 \times 3} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{2}{3}, 1\right\}$$

Il existe alors deux constantes réelles α et β telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^n + \beta(1)^n = \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^n + \beta$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^0 + \beta &=& 2 \\ \alpha\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \beta &=& 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \alpha + \beta &=& 2 \\ \alpha\left(\frac{2}{3}\right) + \beta &=& 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rclc} \frac{1}{3}\alpha &=& -1 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \frac{1}{3}\beta &=& \frac{5}{3} & L_2 \leftarrow L_2 - (2/3)L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \alpha = -3 \\ \beta = 5 \end{array}\right.$$

On calcule alors la somme

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{2004} u_k &= \sum_{k=2}^{2004}\left[-3\left(\frac{2}{3}\right)^n + 5\right] = -3\sum_{k=2}^{2004}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum_{k=2}^{2004} 5 = -3\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2004}\right] + 5(2004 - 2 + 1) \\
&= -3\left(\frac{2}{3}\right)^2\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2002}\right] + 10\,015 = -3\left(\frac{2}{3}\right)^2\sum_{k=0}^{2002}\left(\frac{2}{3}\right)^k + 10\,015 \\
&= -3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2003}}{1 - \frac{2}{3}} + 10\,015 \quad \left(\frac{2}{3} \neq 1\right) = -4\left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2003}\right] + 10\,015 = 10\,011 + 4\left(\frac{2}{3}\right)^{2003}
\end{aligned}$$

correction de l'exercice 10

Comme nous l'indique l'énoncé, on effectue une vérification rapide

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} &= \frac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k(k+1)}\\
\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2} &= \frac{(k+2)(k+1)-2k(k+2)+k(k+1)}{k(k+1)(k+2)}=\frac{(k^2+3k+2)-(2k^2+4k)+(k^2+k)}{k(k+1)(k+2)}\\
&= \frac{2}{k(k+1)(k+2)}\Rightarrow\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right)\\
\frac{1}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{3}{k+2}-\frac{1}{k+3} &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)-3k(k+2)(k+3)+3k(k+1)(k+3)-k(k+1)(k+2)}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\\
&= \frac{(k^3+6k^2+11k+6)-(3k^3+15k^2+18k)+(3k^3+12k^2+9k)-(k^3+3k^2+2k)}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\\
&= \frac{6}{k(k+1)(k+2)(k+3)}\Rightarrow\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{3}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)
\end{aligned}$$

$\underline{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}}$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right]=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}\underset{j=k+1}{=}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}$$

Les indices communs à ces deux sommes forment l'ensemble $\{2,..,n\}$ et, pour $n\geqslant 2$, la relation de Chasles nous donne

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\left[\frac{1}{1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right]-\left[\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{n+1}\right]=1-\frac{1}{n+1}$$

$\underline{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}}$:

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k}-\frac{2}{k+1}+\frac{1}{k+2}\right]=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-2\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}+\sum_{p=3}^{n+2}\frac{1}{p}\quad(j=k+1,\quad p=k+2)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}+\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Les indices communs aux trois sommes forment l'ensemble $\{3,..,n\}$ et, pour $n\geqslant 3$, la relation de Chasles nous donne

$$\begin{aligned}
2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right]-2\left[\frac{1}{2}+\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{n+1}\right]+\left[\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right]\\
&= 1+\frac{1}{2}-1-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\\
\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n+2)}
\end{aligned}$$

$\underline{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}}$:On note S_n cette somme

$$\begin{aligned}
6S_n &= \sum_{k=1}^{n}\frac{6}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{3}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}+3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-3\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{i}+3\sum_{j=3}^{n+2}\frac{1}{j}-\sum_{p=4}^{n+3}\frac{1}{p}\quad(i=k+1,\quad j=k+2,\quad p=k+3)\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-3\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}+3\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}-\sum_{k=4}^{n+3}\frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Les indices communs aux trois sommes forment l'ensemble $\{4,..,n\}$ et, pour $n \geqslant 4$, la relation de Chasles nous donne

$$\begin{aligned}
6S_n &= \left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k}\right]-3\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\left(\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{n+1}\right] \\
&\quad +3\left[\frac{1}{3}+\left(\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right]-\left[\left(\sum_{k=4}^{n}\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right] \\
&= \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{3}{2}-1-\frac{3}{n+1}+1+\frac{3}{n+1}+\frac{3}{n+2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3} \\
&= \frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}+\frac{2}{n+2}-\frac{1}{n+3} \Rightarrow S_n=\frac{1}{18}-\frac{1}{6(n+1)}+\frac{1}{3(n+2)}-\frac{1}{6(n+3)}
\end{aligned}$$

correction de l'exercice 11

Nous allons déterminer les trois réels a, b, c par identification

$$\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2}=\frac{a(k+1)(k+2)+bk(k+2)+ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)}=\frac{k^2(a+b+c)+k(3a+2b+c)+2a}{k(k+1)(k+2)}$$

$$\frac{4k+1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}+\frac{c}{k+2} \Leftrightarrow 4k+1=k^2(a+b+c)+k(3a+2b+c)+2a$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b+c=0 \\ 3a+2b+c=4 \\ 2a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}+b+c=0 \\ \frac{3}{2}+2b+c=4 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=-\frac{1}{2} \\ 2b+c=\frac{5}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b=-3 & L_1 \leftarrow L_1-L_2 \\ -c=\frac{7}{2} & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=3 \\ c=-\frac{7}{2} \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

Nous pouvons alors calculer la somme demandée

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{4k+1}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{k}+3\times\frac{1}{k+1}-\frac{7}{2}\times\frac{1}{k+2}\right]=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+3\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\frac{7}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+3\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{i}-\frac{7}{2}\sum_{j=3}^{n+2}\frac{1}{j} \quad (i=k+1, \quad j=k+2)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+3\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k}-\frac{7}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k}
\end{aligned}$$

Les indices communs aux trois sommes forment l'ensemble $\{3,..,n\}$ et, pour $n \geqslant 3$, la relation de Chasles nous donne

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\frac{4k+1}{k(k+1)(k+2)} &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right]+3\left[\frac{1}{2}+\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{n+1}\right]-\frac{7}{2}\left[\left(\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}\right] \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{2}+\frac{3}{n+1}-\frac{7}{2(n+1)}-\frac{7}{2(n+2)}=\frac{9}{4}-\frac{1}{2(n+1)}-\frac{7}{2(n+2)}
\end{aligned}$$

correction de l'exercice 12

1. $A_n=(n-0+1)\times 1=n+1$.
2. (a) On suit l'indication de l'exercice

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)^2-k^2\right]=\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2-\sum_{k=0}^{n}k^2 \underset{j=k+1}{=} \sum_{j=1}^{n+1}j^2-\sum_{k=0}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n+1}k^2-\sum_{k=0}^{n}k^2$$

Les indices communs aux deux sommes forment l'ensemble $\{1,..,n\}$ et, pour $n \geqslant 1$, la relation de Chasles nous donne

$$S_n=\left[\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)+(n+1)^2\right]-\left[0^2+\left(\sum_{k=1}^{n}k^2\right)\right]=(n+1)^2-0^2=(n+1)^2$$

(b) On a également

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}[2k+1]=2\left(\sum_{k=0}^{n}k\right)+\left(\sum_{k=1}^{n}1\right)=2B_n+(n+1)$$

(c) Des deux questions précédentes, il est immédiat que

$$B_n=\frac{S_n-(n+1)}{2}=\frac{(n+1)^2-(n+1)}{2}=\frac{(n+1)\left[(n+1)-1\right]}{2}=\frac{(n+1)n}{2}$$

3. (a) On suit l'indication de l'exercice

$$T_n = \sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)^3 - k^3\right] = \sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=0}^{n} k^3 \underset{j=k+1}{=} \sum_{j=1}^{n+1} j^3 - \sum_{k=0}^{n} k^3 = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 - \sum_{k=0}^{n} k^3$$

Les indices communs aux deux sommes forment l'ensemble $\{1,..,n\}$ et, pour $n \geqslant 1$, la relation de Chasles nous donne

$$S_n = \left[\left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right) + (n+1)^3\right] - \left[0^3 + \left(\sum_{k=1}^{n} k^3\right)\right] = (n+1)^3 - 0^3 = (n+1)^3$$

(b) On a également

$$T_n = \sum_{k=0}^{n}\left[3k^2 + 3k + 1\right] = 3\left(\sum_{k=0}^{n} k^2\right) + 3\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} 1\right) = 3C_n + 3B_n + (n+1)$$

(c) Des deux questions précédentes, il est immédiat que

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{-3B_n - (n+1) + (n+1)^3}{3} \Leftrightarrow 3C_n = \frac{-\dfrac{3}{2}n(n+1) - (n+1) + (n+1)^3}{3} = \frac{(n+1)\left[-\dfrac{3}{2}n - 1 + (n+1)^2\right]}{3} \\ C_n &= \frac{(n+1)\left[n^2 + \dfrac{1}{2}n\right]}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$