correction de l'exercice 1

1. Le nombre de "Pile" s'appelle X, pour chaque "Pile", le joueur gagne 2 euros donc l'obtention de X "Pile" fait gagner $2 \times X$ euros au joueur et étant donné qu'il paie 3 euros (donc il les perd définitivement), le gain du joueur est $Y = 2X - 3$.

2. Il est évident que $X(\Omega) = [\![0, 3]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0,3]\!], \quad P(X=k) = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-k} = \binom{3}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{3-k} = \frac{\binom{3}{k}}{2^3} = \frac{\binom{3}{k}}{8}$$

ce que l'on peut aussi écrire

$$P(X=0) = \frac{1}{8}, \quad P(X=1) = \frac{3}{8}, \quad P(X=2) = \frac{3}{8}, \quad P(X=3) = \frac{1}{8}$$

Justification du calcul de probabilité : *L'évènement $X = k$ signifie que le joueur a obtenu k "Pile". On choisit k dés parmi les 3 ($\binom{3}{k}$ choix possibles), la probabilité que ces k dés donnent "Pile" est égale à $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ et la probabilité que les $3-k$ autres donnent Face est $\left(1-\frac{1}{2}\right)^k$*

Un calcul direct nous donne

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{3} kP(X=k) = \frac{\binom{3}{1}}{8} + 2\times\frac{\binom{3}{2}}{8} + 3\times\frac{\binom{3}{3}}{8} = \frac{3}{2} \\ E(X^2) &= \sum_{k=0}^{3} k^2 P(X=k) = \frac{\binom{3}{1}}{8} + 2^2\times\frac{\binom{3}{2}}{8} + 3^2\times\frac{\binom{3}{3}}{8} = 3 \\ V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

3. Puisque Y est une fonction affine de X (i.e. Y est de la forme $Y = aX + b$), on a immédiatement

$$E(Y) = E(2X-3) = 2E(X) - 3 = 0 \quad \text{et} \quad V(Y) = V(2X-3) = 2^2 V(X) = 3$$

En moyenne, le joueur n'est ni perdant, ni gagnant.

4. Le tableau

X	0	1	2	3
$Y = 2X-3$	-3	-1	1	3

montre que

$$Y(\Omega) = \{-3, -1, 1, 3\}.$$

Ensuite, on a

$$\begin{aligned} P(Y=-3) &= P(2X-3=-3) = P(X=0) = \frac{\binom{3}{0}}{8} = \frac{1}{8} \\ P(Y=-1) &= P(2X-3=-1) = P(X=1) = \frac{\binom{3}{1}}{8} = \frac{3}{8} \\ P(Y=1) &= P(2X-3=1) = P(X=2) = \frac{3}{8} \\ P(Y=3) &= P(2X-3=3) = P(X=3) = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

correction de l'exercice 2

1. Bien entendu, puisque les pioches sont sans remise, on peut piocher 5 rois donc $X(\Omega) = [\![0, 4]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0,4]\!], \quad P(X=k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{28}{5-k}}{\binom{32}{5}}$$

ou sous une forme plus explicite

$$\begin{aligned} P(X=0) &= \frac{\binom{4}{0}\binom{28}{5-0}}{\binom{32}{5}} = \frac{1755}{3596}, \quad P(X=1) = \frac{\binom{4}{1}\binom{28}{5-1}}{\binom{32}{5}} = \frac{2925}{7192}, \quad P(X=2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{28}{5-2}}{\binom{32}{5}} = \frac{351}{3596} \\ P(X=3) &= \frac{\binom{4}{3}\binom{28}{5-3}}{\binom{32}{5}} = \frac{27}{3596} \quad P(X=4) = \frac{\binom{4}{4}\binom{28}{5-4}}{\binom{32}{5}} = \frac{1}{7192} \end{aligned}$$

Justification du calcul de probabilité : *L'évènement $X = k$ signifie que l'on a pioché k rois. Pour les cas favorables, on choisit k cartes parmi les 4 rois disponibles ($\binom{4}{k}$ choix) et les $5-k$ autres cartes parmi les $32-4=28$ cartes qui ne sont pas des rois ($\binom{28}{5-k}$ choix) et pour les cas possibles, on choisit 5 cartes parmi les 32 disponibles.*
Un calcul direct fournit l'espérance de X

$$E(X) = \sum_{k=0}^{4} kP(X=k) = \frac{2925}{7192} + 2 \times \frac{351}{3596} + 3 \times \frac{27}{3596} + 4 \times \frac{1}{7192} = \frac{5}{8}$$

2. (a) Le nombre de rois obtenus est égal à X. Etant donné que chaque roi apporte a euros, les X rois apportent aX rois et le joueur doit payer 2 euros (donc il les perd définitivement) donc le gain G_X du joueur est égal à

$$G_X = aX - 2.$$

La variable G_X étant une expression affine en X (i.e. de la forme $aX+b$), le cours nous donne directement

$$E(G_X) = E(aX-2) = aE(X) - 2 = \frac{5a}{8} - 2$$

(b) Le jeu est favorable au joueur en moyenne si

$$E(G_X) \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{5a}{8} - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{5a}{8} \geqslant 2 \Leftrightarrow a \geqslant \frac{16}{5} = 3,2$$

Par conséquent, le jeu est favorable au joueur en moyenne si et seulement chaque roi rapporte au moins 3,2 euros.

(c) Le tableau ci-contre

X	0	1	2	3	4
G_X	-2	$a-2$	$2a-2$	$3a-2$	$4a-2$

montre que

$$G_X(\Omega) = \{-2, a-2, 2a-2, 3a-2, 4a-2\} = \{ak-2, \quad k \in [\![0,4]\!]$$

Ensuite, puisque a est non nul, on a

$$P(G_X = ak-2) = P(aX - 2 = ak - 2) = P(X = k) = \frac{\binom{4}{k}\binom{28}{5-k}}{\binom{32}{5}}$$

ou encore, sous une forme plus explicite,

$$\begin{aligned}
P(G_X = -2) &= P(aX-2=-2) = P(X=0) = \frac{1755}{3596} \\
P(G_X = a-2) &= P(aX-2=a-2) = P(X=1) = \frac{2925}{7192} \\
P(G_X = 2a-2) &= P(aX-2=2a-2) = P(X=2) = \frac{351}{3596} \\
P(G_X = 3a-2) &= P(aX-2=3a-2) = P(X=3) = \frac{27}{3596} \\
P(G_X = 4a-2) &= P(aX-2=4a-2) = P(X=4) = \frac{1}{7192}
\end{aligned}$$

correction de l'exercice 3

1. Il est évident que $X_1(\Omega) = \{0,1,2\}$ et $P(X_1 = 0) = \frac{1}{6}$, $\quad P(X_1 = 1) = \frac{2}{6}$, $\quad P(X_1 = 2) = \frac{3}{6}$.
   Je laisse le lecteur vérifier que $E(X_1) = \frac{4}{3}$, $E(X_1^2) = \frac{7}{3}$ et $V(X_1) = \frac{5}{9}$

2. De même, on a $X_2(\Omega) = \{0,1,2\}$ et $P(X_2 = 0) = \frac{3}{6}$, $\quad P(X_2 = 1) = \frac{2}{6}$, $\quad P(X_2 = 2) = \frac{1}{6}$.
   Je laisse le lecteur vérifier que $E(X_2) = \frac{2}{3}$, $E(X_2^2) = 1$ et $V(X_2) = \frac{5}{9}$

3. (a) Par linéarité de l'espérance, on a

$$\begin{aligned}
E(Z) &= E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2 \\
E(T) &= E(X_1 - X_2) = E(X_1) - E(X_2) = \frac{4}{3} - \frac{2}{3} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(b) Les tableaux suivants nous donnent l'univers de chaque variable

$Z = X_1 + X_2$	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$
$X_1 = 0$	0	1	2
$X_1 = 1$	1	2	3
$X_1 = 2$	2	3	4

$T = X_1 - X_2$	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$
$X_1 = 0$	0	-1	-2
$X_1 = 1$	1	0	-1
$X_1 = 2$	2	1	0

$R = X_1 X_2$	$X_2 = 0$	$X_2 = 1$	$X_2 = 2$
$X_1 = 0$	0	0	0
$X_1 = 1$	0	1	2
$X_1 = 2$	0	2	4

donc $Z(\Omega) = [\![0, 4]\!]$, $T(\Omega) = [\![-2, 2]\!]$, $R(\Omega) = \{0, 1, 2, 4\}$.
Etant donné que les résultats des dés soient indépendants, les variables X_1 et X_2 sont indépendantes et les calculs suivants donnent la loi de chacune des variables.

<u>Loi de Z</u> :

$$\begin{aligned}
P(Z=0) &= P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) = \frac{3}{36} \\
P(Z=1) &= P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) \\
&= P(X_1 = 0)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) = \frac{8}{36} \\
P(Z=2) &= P(X_1 = 2 \cap X_2 = 0) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 0 \cap X_2 = 2) \\
&= P(X_1 = 2)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 2) = \frac{14}{36} \\
P(Z=3) &= P(X_1 = 1 \cap X_2 = 2) + P(X_1 = 2 \cap X_2 = 1) \\
&= P(X_1 = 1)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 1) = \frac{8}{36} \\
P(Z=4) &= P(X_1 = 2 \cap X_2 = 2) = P(X_1 = 2)P(X_2 = 2) = \frac{3}{36}
\end{aligned}$$

<u>Loi de T</u> :

$$\begin{aligned}
P(T=-2) &= P(X_1 = 0 \cap X_2 = 2) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 2) = \frac{1}{36} \\
P(T=-1) &= P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 2) = P(X_1 = 0)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 2) = \frac{4}{36} \\
P(T=0) &= P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 2 \cap X_2 = 2) \\
&= P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 2) = \frac{10}{36} \\
P(T=1) &= P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) + P(X_1 = 2 \cap X_2 = 1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 1) = \frac{12}{36} \\
P(T=2) &= P(X_1 = 2 \cap X_2 = 0) = P(X_1 = 2)P(X_2 = 0) = \frac{9}{36}
\end{aligned}$$

<u>Loi de R</u> :

$$\begin{aligned}
P(R=0) &= P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) + P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 0 \cap X_2 = 2) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) + P(X_1 = 2 \cap \\
&= P(X_1 = 0)P(X_2 = 0) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 1) + P(X_1 = 0)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 1)P(X_2 = 0) + P(X_1 = \\
&= \frac{21}{36} \\
P(R=1) &= P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = \frac{4}{36} \\
P(R=2) &= P(X_1 = 1 \cap X_2 = 2) + P(X_1 = 2 \cap X_2 = 1) = P(X_1 = 1)P(X_2 = 2) + P(X_1 = 2)P(X_2 = 1) = \frac{8}{36} \\
P(R=4) &= P(X_1 = 2 \cap X_2 = 2) = P(X_1 = 2)P(X_2 = 2) = \frac{3}{36}
\end{aligned}$$

En résumé, on a

$$\begin{aligned}
P(Z=0) &= \frac{3}{36} \quad P(Z=1) = \frac{8}{36} \quad P(Z=2) = \frac{14}{36} \quad P(Z=3) = \frac{8}{36} \quad P(Z=4) = \frac{3}{36} \\
P(T=-2) &= \frac{1}{36} \quad P(T=-1) = \frac{4}{36} \quad P(T=0) = \frac{10}{36} \quad P(T=1) = \frac{12}{36} \quad P(T=2) = \frac{9}{36} \\
P(R=0) &= \frac{21}{36} \quad P(R=1) = \frac{4}{36} \quad P(R=2) = \frac{8}{36} \quad P(R=4) = \frac{3}{36}
\end{aligned}$$

correction de l'exercice 4

1. Loi de X_1 : $X_1(\Omega) = \{0,1\}$. L'obtention de la première boule dépend de l'urne choisie (et au premier tirage, elle est aléatoire) donc, en utilisant le système complet d'évènements (U_1, U_2), on a :

$$\begin{aligned} P(X_1 = 0) &= P(U_1 \cap (X_1 = 0)) + P(U_2 \cap (X_1 = 0)) = P(U_1)P_{U_1}(X_1 = 0) + P(U_2)P_{U_2}(X_1 = 0) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{n_1}{b_1 + n_1} + \frac{1}{2} \times \frac{n_2}{b_2 + n_2} = \frac{b_1 n_2 + b_2 n_1 + 2n_1 n_2}{2(b_1 + n_1)(b_2 + n_2)} \\ P(X_1 = 1) &= P(U_1 \cap (X_1 = 1)) + P(U_2 \cap (X_1 = 1)) = P(U_1)P_{U_1}(X_1 = 1) + P(U_2)P_{U_2}(X_1 = 1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{b_1}{b_1 + n_1} + \frac{1}{2} \times \frac{b_2}{b_2 + n_2} = \frac{2b_1 b_2 + b_1 n_2 + b_2 n_1}{2(b_1 + n_1)(b_2 + n_2)} \end{aligned}$$

Justification des calculs de probabilités :

Puisque l'on choisit au hasard (donc avec équiprobabilité) l'une des deux urnes, il est évident que $P(U_1) = P(U_2) = \frac{1}{2}$.

$P_{U_1}(X_1 = 0)$ *: On pioche dans l'urne* U_1 *et l'on souhaite ne pas obtenir une boule blanche, c'est-à-dire que l'on pioche une boule noire. L'urne* U_1 *contenant* n_1 *boules noires et* $b_1 + n_1$ *boules au total donc la probabilité de piocher une boule noire est égale à* $\frac{n_1}{b_1 + n_1}$.

$P_{U_2}(X_1 = 0)$ *: On pioche dans l'urne* U_2 *et l'on souhaite ne pas obtenir une boule blanche, c'est-à-dire que l'on pioche une boule noire. L'urne* U_2 *contenant* n_2 *boules noires et* $b_2 + n_2$ *boules au total donc la probabilité de piocher une boule noire est égale à* $\frac{n_2}{b_2 + n_2}$.

$P_{U_1}(X_1 = 1)$ *: On pioche dans l'urne* U_1 *et l'on souhaite obtenir une boule blanche. L'urne* U_1 *contenant* b_1 *boules blanches et* $b_1 + n_1$ *boules au total donc la probabilité de piocher une boule blanche est égale à* $\frac{b_1}{b_1 + n_1}$.

$P_{U_2}(X_1 = 1)$ *: On pioche dans l'urne* U_1 *et l'on souhaite obtenir une boule blanche. L'urne* U_2 *contenant* b_2 *boules blanches et* $b_2 + n_2$ *boules au total donc la probabilité de piocher une boule blanche est égale à* $\frac{b_2}{b_2 + n_2}$.

Loi de X_2 : Par construction, on a $X_1(\Omega) = \{0,1\}$.

La variable X_2 représente le fait que l'on a pioché une boule blanche ou non au second tirage. Or le choix de l'urne dans laquelle on pioche dépend de l'obtention ou non d'une boule blanche au premier tirage, c'est-à-dire des évènements $(X_1 = 0)$ et $(X_1 = 1)$. On introduit naturellement le système complet d'évènements $(X_1 = 0)$, $(X_1 = 1)$ pour calculer $P(X_2 = 0)$ et $P(X_2 = 1)$

$$\begin{aligned} P(X_2 = 0) &= P(X_1 = 0 \cap X_2 = 0) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 0) \\ &= P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 0) + P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = 0) \\ &= \frac{n_1(b_2 + n_2) + n_2(b_1 + n_1)}{2(b_1 + n_1)(b_2 + n_2)} \times \frac{n_2}{b_2 + n_2} + \frac{b_1(b_2 + n_2) + b_2(b_1 + n_1)}{2(b_1 + n_1)(b_2 + n_2)} \times \frac{n_1}{b_1 + n_1} \\ P(X_2 = 1) &= P(X_1 = 0 \cap X_2 = 1) + P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) \\ &= P(X_1 = 0)P_{(X_1=0)}(X_2 = 1) + P(X_1 = 1)P_{(X_1=1)}(X_2 = 1) \\ &= \frac{n_1(b_2 + n_2) + n_2(b_1 + n_1)}{2(b_1 + n_1)(b_2 + n_2)} \times \frac{b_2}{b_2 + n_2} + \frac{b_1(b_2 + n_2) + b_2(b_1 + n_1)}{2(b_1 + n_1)(b_2 + n_2)} \times \frac{b_1}{b_1 + n_1} \end{aligned}$$

On ne peut guère plus simplifier les calculs.

Justification des calculs de probabilités conditionnelles :

$P_{(X_1=0)}(X_2 = 0)$ *: L'évènement* $(X_1 = 0)$ *est réalisé, c'est-à-dire que l'on a pioché une boule noire au premier tirage donc le second tirage s'effectue dans l'urne* U_2. *On souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_2 = 0)$, *c'est-à-dire que l'on veut piocher une boule noire au second tirage, qui s'effectue dans l'urne* U_2. *Cette probabilité est alors égale à* $\frac{n_2}{b_2 + n_2}$.

$P_{(X_1=1)}(X_2 = 0)$ *: L'évènement* $(X_1 = 1)$ *est réalisé, c'est-à-dire que l'on a pioché une boule blanche au premier tirage donc le second tirage s'effectue dans l'urne* U_1. *On souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_2 = 0)$, *c'est-à-dire que l'on veut piocher une boule noire au second tirage, qui s'effectue dans l'urne* U_1. *Cette probabilité est alors égale à* $\frac{n_1}{b_1 + n_1}$.

$P_{(X_1=0)}(X_2 = 1)$ *: L'évènement* $(X_1 = 0)$ *est réalisé, c'est-à-dire que l'on a pioché une boule noire au premier tirage donc le second tirage s'effectue dans l'urne* U_2. *On souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_2 = 1)$, *c'est-à-dire que l'on veut piocher une boule blanche au second tirage, qui s'effectue dans l'urne* U_2. *Cette probabilité est alors égale à* $\frac{b_2}{b_2 + n_2}$.

$P_{(X_1=1)}(X_2 = 1)$ *: L'évènement* $(X_1 = 1)$ *est réalisé, c'est-à-dire que l'on a pioché une boule blanche au premier tirage donc le second tirage s'effectue dans l'urne* U_1. *On souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_2 = 1)$, *c'est-à-dire que l'on veut piocher une boule blanche au second tirage, qui s'effectue dans l'urne* U_1. *Cette probabilité est alors égale à* $\frac{b_1}{b_1 + n_1}$.

2. Les évènements $(X_{i+1}=0)$ et $(X_{i+1}=1)$ correspondent au fait que l'on pioche une boule noire ou une boule blanche au $(i+1)$-ième tirage, ces pioches dépendant bien entendu du fait que l'on pioche dans l'urne U_1 ou U_2. Le choix de l'urne dépend de la pioche d'une boule blanche ou d'une boule noire au i-ième tirage, c'est-à-dire des évènements $(X_i=0)$ et $(X_i=1)$. Pour les calculs demandés, on introduit par conséquent, le système complet d'évènements $(X_i=0)$ et $(X_i=1)$
Calcul de $P(X_{i+1}=0)$ en fonction de $P(X_i=0)$ et $P(X_i=1)$:

$$\begin{aligned}
P\left(X_{i+1}=0\right) &= P(X_i=0\cap X_{i+1}=0)+P(X_i=1\cap X_{i+1}=0)\\
&= P(X_i=0)P_{(X_i=0)}(X_{i+1}=0)+P(X_i=1)P_{(X_i=1)}(X_{i+1}=0)\\
&= P(X_i=0)\times\frac{n_2}{b_2+n_2}+P(X_i=1)\times\frac{n_1}{b_1+n_1}\\
P\left(X_{i+1}=1\right) &= P(X_i=0\cap X_{i+1}=1)+P(X_i=1\cap X_{i+1}=1)\\
&= P(X_i=0)P_{(X_i=0)}(X_{i+1}=1)+P(X_i=1)P_{(X_i=1)}(X_{i+1}=1)\\
&= P(X_i=0)\times\frac{b_2}{b_2+n_2}+P(X_i=1)\times\frac{b_1}{b_1+n_1}
\end{aligned}$$

Justification des calculs de probabilités conditionnelles :
$P_{(X_i=0)}(X_{i+1}=0)$: *L'évènement $(X_i=0)$ est réalisé, c'est-à-dire que l'on a pioché une boule noire au i-ième tirage donc le $(i+1)$-ème tirage s'effectue dans l'urne U_2. On souhaite la réalisation de l'évènement $(X_{i+1}=0)$, c'est-à-dire que l'on veut piocher une boule noire au $(i+1)$-ème tirage, qui s'effectue dans l'urne U_2. Cette probabilité est alors égale à* $\dfrac{n_2}{b_2+n_2}$.
$P_{(X_i=1)}(X_{i+1}=0)$: *L'évènement $(X_i=1)$ est réalisé, c'est-à-dire que l'on a pioché une boule blanche au i-ième tirage donc le $(i+1)$-ème tirage s'effectue dans l'urne U_1. On souhaite la réalisation de l'évènement $(X_{i+1}=0)$, c'est-à-dire que l'on veut piocher une boule noire au $(i+1)$-ème tirage, qui s'effectue dans l'urne U_1. Cette probabilité est alors égale à* $\dfrac{n_1}{b_1+n_1}$.
$P_{(X_i=0)}(X_{i+1}=1)$: *L'évènement $(X_i=0)$ est réalisé, c'est-à-dire que l'on a pioché une boule noire au i-ième tirage donc le $(i+1)$-ème tirage s'effectue dans l'urne U_2. On souhaite la réalisation de l'évènement $(X_{i+1}=1)$, c'est-à-dire que l'on veut piocher une boule blanche au $(i+1)$-ème tirage, qui s'effectue dans l'urne U_2. Cette probabilité est alors égale à* $\dfrac{b_2}{b_2+n_2}$.
$P_{(X_i=1)}(X_{i+1}=1)$: *L'évènement $(X_i=1)$ est réalisé, c'est-à-dire que l'on a pioché une boule blanche au i-ième tirage donc le $(i+1)$-ème tirage s'effectue dans l'urne U_1. On souhaite la réalisation de l'évènement $(X_{i+1}=1)$, c'est-à-dire que l'on veut piocher une boule blanche au $(i+1)$-ème tirage, qui s'effectue dans l'urne U_1. Cette probabilité est alors égale à* $\dfrac{b_1}{b_1+n_1}$.

3. Les évènements $(X_i=0)$ et $(X_i=1)$ formant un système complet d'évènements donc

$$P(X_i=0)+P(X_i=1)=1\Leftrightarrow P(X_i=1)=1-P(X_i=0)$$

L'expression de $P(X_{i+1}=0)$ en fonction de $P(X_i=0)$ et $P(X_i=1)$ obtenue à la question 2 nous donne

$$P(X_{i+1}=0)=P(X_i=0)\times\frac{n_2}{b_2+n_2}+(1-P(X_i=0))\times\frac{n_1}{b_1+n_1}=\left(\frac{n_2}{b_2+n_2}-\frac{n_1}{b_1+n_1}\right)P(X_i=0)+\frac{n_1}{b_1+n_1}$$

donc la suite $(P(X_i=0))_{i\in\mathbb{N}}$ est bien une suite arithmético-géométrique.
Explicitation de $P(X_i=0)$: Détermination de la constante L

$$\begin{aligned}
L &= \left(\frac{n_2}{b_2+n_2}-\frac{n_1}{b_1+n_1}\right)L+\frac{n_1}{b_1+n_1}\Leftrightarrow L\left(1-\frac{n_2}{b_2+n_2}+\frac{n_1}{b_1+n_1}\right)=\frac{n_1}{b_1+n_1}\\
&\Leftrightarrow \frac{b_1b_2+2b_2n_1+n_1n_2}{(b_1+n_1)(b_2+n_2)}L=\frac{n_1}{b_1+n_1}\Leftrightarrow L=\frac{n_1(b_2+n_2)}{b_1b_2+2b_2n_1+n_1n_2}
\end{aligned}$$

Par conséquent, la suite $u_i=P(X_i=0)-L$ est géométrique de raison $\dfrac{n_2}{b_2+n_2}-\dfrac{n_1}{b_1+n_1}$ (revoir les nombreuses explicitations des suites arithmético-géométriques) donc

$$\begin{aligned}
\forall i\in\mathbb{N}^\times,\quad & u_i=\left(\frac{n_2}{b_2+n_2}-\frac{n_1}{b_1+n_1}\right)^i u_0\Leftrightarrow P(X_i=0)-L=\left(\frac{n_2}{b_2+n_2}-\frac{n_1}{b_1+n_1}\right)^{i-1}(P(X_1=0)-L)\\
\Leftrightarrow\ & P(X_i=0)=L+\left(\frac{n_2}{b_2+n_2}-\frac{n_1}{b_1+n_1}\right)^{i-1}(P(X_1=0)-L)\\
\Leftrightarrow\ & P(X_i=0)=\frac{n_1(b_2+n_2)}{b_1b_2+2b_2n_1+n_1n_2}+\left(\frac{n_2}{b_2+n_2}-\frac{n_1}{b_1+n_1}\right)^{i-1}\left(\frac{b_1n_2+b_2n_1+2n_1n_2}{2(b_1+n_1)(b_2+n_2)}-\frac{n_1(b_2+n_2)}{b_1b_2+2b_2n_1+n_1n_2}\right)
\end{aligned}$$

On exprime u_i en fonction de u_1 car la probabilité $P(X_0 = 0)$ n'a pas de sens.

Explicitation de $P(X_i = 1)$:

$$\begin{aligned}
P(X_i &= 1) = 1 - P(X_i = 0) \\
&= 1 - \frac{n_1(b_2+n_2)}{b_1b_2+2b_2n_1+n_1n_2} - \left(\frac{n_2}{b_2+n_2} - \frac{n_1}{b_1+n_1}\right)^{i-1}\left(\frac{b_1n_2+b_2n_1+2n_1n_2}{2(b_1+n_1)(b_2+n_2)} - \frac{n_1(b_2+n_2)}{b_1b_2+2b_2n_1+n_1n_2}\right) \\
&= \frac{b_2\,(b_1+n_1)}{b_1b_2+2b_2n_1+n_1n_2} - \left(\frac{n_2}{b_2+n_2} - \frac{n_1}{b_1+n_1}\right)^{i-1}\left(\frac{b_1n_2+b_2n_1+2n_1n_2}{2(b_1+n_1)(b_2+n_2)} - \frac{n_1(b_2+n_2)}{b_1b_2+2b_2n_1+n_1n_2}\right)
\end{aligned}$$

4. Il est évident que $\dfrac{n_2}{b_2+n_2} \in]0,1[$ et que $\dfrac{n_1}{b_1+n_1} \in]0,1[$ donc $\dfrac{n_2}{b_2+n_2} - \dfrac{n_1}{b_1+n_1} \in]-1,1[$. Par conséquent, on a

$$\lim_{i\to+\infty}\left(\frac{n_2}{b_2+n_2} - \frac{n_1}{b_1+n_1}\right)^{i-1} = 0$$

ce qui implique que

$$\lim_{i\to+\infty} P(X_i = 0) = \frac{n_1(b_2+n_2)}{b_1b_2+2b_2n_1+n_1n_2} \quad \text{et} \quad \lim_{i\to+\infty} P(X_i = 1) = \frac{b_2\,(b_1+n_1)}{b_1b_2+2b_2n_1+n_1n_2}$$

Interprétation : après un nombre suffisamment grand nombre de tirages, la probabilité de piocher une boule blanche est très proche de $\dfrac{b_2\,(b_1+n_1)}{b_1b_2+2b_2n_1+n_1n_2}$ et la probabilité de piocher une boule noire est proche de $\dfrac{n_1(b_2+n_2)}{b_1b_2+2b_2n_1+n_1n_2}$

correction de l'exercice 5

1. Nous allons donner les différents contenus des deux urnes à chaque lancer

initialement	après 1 lancer	après 2 lancers	après 3 lancers	après 4 lancers	après 5 lancers
U_1 : 1,2	U_1 : 2	U_1 : 2,3	U_1 : 3	U_1 :	U_1 : 5
U_2 : 3,4,5,6	U_2 : 1,3,4,5,6	U_2 : 1,4,5,6	U_2 : 1,2,4,5,6	U_2 : 1,2,3,4,5,6	U_2 : 1,2,3,4,6

donc l'urne U_1 contient uniquement la boule n° 5 à l'issue du cinquième échange

2. Après le premier changement, l'urne U_1 contient soit une boule supplémentaire (si le dé a donné un numéro présent dans l'urne U_2), soit une boule en moins (si le dé a donné un numéro présent dans l'urne U_1). Par conséquent, l'urne U_1 contenant initalement 2 boules, après un échange l'urne U_1 contient 1 ou 3 boules donc $X_1(\Omega) = \{1,3\}$. L'évolution du contenu de l'urne U_1 dépendant clairement du numéro obtenu avec le dé, on introduit le système complet d'évènements D_i, où l'évènement D_i est défini par

$$\boxed{D_i : \text{" le dé fournit le numéro } i \text{ "}}$$

$$\begin{aligned}
P(X_1 = 1) &= P(D_1 \cap X_1 = 1) + P(D_2 \cap X_1 = 1) + \underbrace{P(D_3 \cap X_1 = 1)}_{=0} + \underbrace{P(D_4 \cap X_1 = 1)}_{=0} \\
&\quad + \underbrace{P(D_5 \cap X_1 = 1)}_{=0} + \underbrace{P(D_6 \cap X_1 = 1)}_{=0} \\
&= P(D_1)P_{D_1}(X_1 = 1) + P(D_2)P_{D_2}(X_1 = 1) = \frac{1}{6}\times 1 + \frac{1}{6}\times 1 = \frac{1}{3} \\
P(X_1 = 3) &= \underbrace{P(D_1 \cap X_1 = 3)}_{=0} + \underbrace{P(D_2 \cap X_1 = 3)}_{=0} + P(D_3 \cap X_1 = 3) + P(D_4 \cap X_1 = 3) \\
&\quad + P(D_5 \cap X_1 = 3) + P(D_6 \cap X_1 = 3) \\
&= P(D_3)P_{D_3}(X_1 = 3) + P(D_4)P_{D_4}(X_1 = 3) + P(D_5)P_{D_5}(X_1 = 3) + P(D_6)P_{D_6}(X_1 = 3) \\
&= \frac{1}{6}\times 1 + \frac{1}{6}\times 1 + \frac{1}{6}\times 1 + \frac{1}{6}\times 1 = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Justification des calculs de probabilités :

$P(D_3 \cap X_1 = 1)$: *L'évènement $D_3 \cap X_1 = 1$ est impossible car il signifie que le dé a fourni le numéro 3, donc la boule numéro 3 qui était présent dans l'urne U_2 est déplacé dans l'urne U_1, ce qui implique qu'à l'issue du premier changement l'urne U_1 contient les boules numéro 1,2,3 donc trois boules, ce qui contredit la réalisation de l'évènement $X_1 = 1$.*

$P_{D_1}(X_1 = 1)$: *l'évènement D_1 est réalisé, c'est-à-dire que le dé a fourni le numéro 1, donc la boule numéro 1 quitte l'urne U_1 et à l'issue du premier changement l'urne U_1 contient uniquement la boule numéro 2 donc une boule. Par conséquent, l'évènement $X_1 = 1$ se réalise nécesssairement, ce qui implique que $P_{D_1}(X_1 = 1) = 1$.*

Il est alors immédiat que $E(X_1) = 1 \times \dfrac{1}{3} + 3 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{7}{3}$.

3. Comme précédemment, après le premier changement, l'urne U_1 contient soit une boule supplémentaire (si le dé a donné un numéro présent dans l'urne U_2), soit une boule en moins (si le dé a donné un numéro présent dans l'urne U_1). Par conséquent, l'urne U_1, qui contient après 1 changement soit 1 boule, soit 3 boules, contient après le deuxième changement 0 boule ou 2 boules ou 2 boules ou 4 boules donc $X_2(\Omega) = \{0, 2, 4\}$.
   Le contenu de l'urne U_1 après deux changements dépend à la fois du résultat du lancer du dé et du contenu de l'urne U_1 après un changement. Bien entendu, on doit connaitre préalablement le contenu de l'urne U_1 après un changement (le dé n'étant lancé qu'après), on considère le système complet d'évènements $(X_1 = 1)$ et $(X_1 = 3)$ qui décrit justement ce contenu.

$$\begin{aligned}
P(X_2=0) &= P(X_1=1\cap X_2=0)+\underbrace{P(X_1=3\cap X_2=0)}_{=0} = P(X_1=1)P_{(X_1=1)}(X_2=0)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{18}\\
P(X_2=2) &= P(X_1=1\cap X_2=2)+P(X_1=3\cap X_2=2)\\
&= P(X_1=1)P_{(X_1=1)}(X_2=2)+P(X_1=3)P_{(X_1=3)}(X_2=2)=\frac{1}{3}\times\frac{5}{6}+\frac{2}{3}\times\frac{3}{6}=\frac{11}{18}\\
P(X_2=4) &= \underbrace{P(X_1=1\cap X_2=4)}_{=0}+P(X_1=3\cap X_2=4)=P(X_1=3)P_{(X_1=3)}(X_2=4)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{6}=\frac{6}{18}
\end{aligned}$$

   Vérification : $P(X_2 = 0) + P(X_2 = 2) + P(X_2 = 4) = 1$
   Justification des calculs de probabilités :
   $P_{(X_1=1)}(X_2 = 0)$ *: L'évènement* $(X_1 = 1)$ *est réalisé et l'on souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_2 = 0)$*, c'est-à-dire que l'urne* U_1 *contient après un échange 1 boule (donc l'urne* U_2 *en contient 5) et l'on souhaite qu'à l'issue du deuxième échange l'urne* U_1 *contienne 0 boule. Cela n'est possible que si le dé fourni le numéro de la boule contenue dans l'urne* U_1 *(afin de déplacer dans l'urne* U_2 *la boule correspondante). Etant donné qu'il y a 6 numéros possibles et 1 seul est favorable, la probabilité de réalisation vaut* $\frac{1}{6}$.
   $P(X_1 = 3 \cap X_2 = 0)$ *: L'évènement* $(X_1 = 3)$ *signifie que l'urne* U_1 *contient 3 boules après un échange et l'évènement* $(X_2 = 0)$ *signifie que l'urne* U_1 *contient 0 boule au deuxième échange (l'échange suivant). La réalisation de l'évènement* $(X_1 = 3)$ *implique nécessairement qu'à l'échange suivant l'urne* U_1 *contient 2 ou 4 boules, ce qui contredit la réalisation de l'évènement* $(X_2 = 0)$ *donc* $P(X_1 = 3 \cap X_2 = 0) = 0$
   $P_{(X_1=1)}(X_2 = 2)$ *: L'évènement* $(X_1 = 1)$ *est réalisé et l'on souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_2 = 2)$*, c'est-à-dire que l'urne* U_1 *contient après un échange 1 boule (donc l'urne* U_2 *en contient 5) et l'on souhaite qu'à l'issue du deuxième échange l'urne* U_1 *contienne 2 boules. Cela n'est possible que si le dé fourni le numéro d'une boule contenue dans l'urne* U_2 *(afin de déplacer dans l'urne* U_1 *la boule correspondante). Etant donné qu'il y a 6 numéros possibles et 5 numéros sont favorables, la probabilité de réalisation vaut* $\frac{5}{6}$.
   $P_{(X_1=3)}(X_2 = 2)$ *: L'évènement* $(X_1 = 3)$ *est réalisé et l'on souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_2 = 2)$*, c'est-à-dire que l'urne* U_1 *contient après un échange 3 boules (donc l'urne* U_2 *en contient 3) et l'on souhaite qu'à l'issue du deuxième échange l'urne* U_1 *contienne 2 boules. Cela n'est possible que si le dé fourni le numéro d'une boule contenue dans l'urne* U_1 *(afin de déplacer dans l'urne* U_2 *la boule correspondante). Etant donné qu'il y a 6 numéros possibles et 3 numéros sont favorables, la probabilité de réalisation vaut* $\frac{3}{6}$.
   $P(X_1 = 1 \cap X_2 = 4)$ *: L'évènement* $(X_1 = 1)$ *signifie que l'urne* U_1 *contient 1 boule après un échange et l'évènement* $(X_2 = 4)$ *signifie que l'urne* U_1 *contient 4 boules au deuxième échange (l'échange suivant). La réalisation de l'évènement* $(X_1 = 1)$ *implique nécessairement qu'à l'échange suivant l'urne* U_1 *contient 0 ou 2 boules, ce qui contredit la réalisation de l'évènement* $(X_2 = 4)$ *donc* $P(X_1 = 1 \cap X_2 = 4) = 0$
   $P_{(X_1=3)}(X_2 = 4)$ *: L'évènement* $(X_1 = 3)$ *est réalisé et l'on souhaite la réalisation de l'évènement* $(X_2 = 4)$*, c'est-à-dire que l'urne* U_1 *contient après un échange 3 boules (donc l'urne* U_2 *en contient 3) et l'on souhaite qu'à l'issue du deuxième échange l'urne* U_1 *contienne 4 boules. Cela n'est possible que si le dé fourni le numéro d'une boule contenue dans l'urne* U_2 *(afin de déplacer dans l'urne* U_1 *la boule correspondante). Etant donné qu'il y a 6 numéros possibles et 3 numéros sont favorables, la probabilité de réalisation vaut* $\frac{3}{6}$.

4. En général, le nombre de boules dans l'urne U_1 prend toutes les valeurs entre 0 et 6 donc $X_n(\Omega) = [\![0, 6]\!]$ (même si pour des valeurs particulières de n, la variable X_n ne prend pas toutes les valeurs entre 0 et 6)

5. Le contenu de l'urne U_1 après $n + 1$ changements dépend à la fois du résultat du lancer du dé et du contenu de l'urne U_1 après n changement. Bien entendu, on doit connaitre préalablement le contenu de l'urne U_1 après n changement (le dé n'étant lancé qu'après), on considère le système complet d'évènements $(X_1 = k)_{k\in[\![0,6]\!]}$ qui décrit justement ce

contenu.

$$\begin{aligned}
P\left(X_{n+1}=0\right) &= \underbrace{P\left(X_n=0\cap X_{n+1}=0\right)}_{=0}+P\left(X_n=1\cap X_{n+1}=0\right)\\
&\quad+\underbrace{P\left(X_n=2\cap X_{n+1}=0\right)+\cdots+P\left(X_n=6\cap X_{n+1}=0\right)}_{=0}\\
&= P\left(X_n=1\right)P_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=0\right)=\frac{1}{6}P(X_n=1)\\
P\left(X_{n+1}=1\right) &= P\left(X_n=0\cap X_{n+1}=1\right)+\underbrace{P\left(X_n=1\cap X_{n+1}=1\right)}_{=0}+P\left(X_n=2\cap X_{n+1}=1\right)\\
&\quad+\underbrace{P\left(X_n=3\cap X_{n+1}=1\right)\cdots+P\left(X_n=6\cap X_{n+1}=1\right)}_{=0}\\
&= P(X_n=0)P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)+P(X_n=2)P_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)=\frac{6}{6}P(X_n=0)+\frac{2}{6}P(X_n=2)\\
P\left(X_{n+1}=2\right) &= \underbrace{P(X_n=0\cap X_{n+1}=2)}_{=0}+P(X_n=1\cap X_{n+1}=2)+\underbrace{P(X_n=2\cap X_{n+1}=2)}_{=0}\\
&\quad+P\left(X_n=3\cap X_{n+1}=2\right)+\underbrace{P\left(X_n=4\cap X_{n+1}=2\right)+\cdots+P\left(X_n=6\cap X_{n+1}=2\right)}_{=0}\\
&= P(X_n=1)P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)+P(X_n=3)P_{(X_n=3)}(X_{n+1}=2)=\frac{5}{6}P(X_n=1)+\frac{3}{6}P(X_n=3)\\
P\left(X_{n+1}=3\right) &= \underbrace{P(X_n=0\cap X_{n+1}=3)+P(X_n=1\cap X_{n+1}=3)}_{=0}+P(X_n=2\cap X_{n+1}=3)\\
&\quad+\underbrace{P\left(X_n=3\cap X_{n+1}=3\right)}_{=0}+P\left(X_n=4\cap X_{n+1}=3\right)+\underbrace{P\left(X_n=5\cap X_{n+1}=3\right)+P\left(X_n=6\cap X_{n+1}=3\right)}_{=0}\\
P\left(X_{n+1}=3\right) &= P(X_n=2)P_{(X_n=2)}P(X_{n+1}=3)+P\left(X_n=4)P_{(X_n=4)}P(X_{n+1}=3\right)=\frac{4}{6}P(X_n=2)+\frac{4}{6}P(X_n=4)\\
P\left(X_{n+1}=4\right) &= \underbrace{P(X_n=0\cap X_{n+1}=4)+\cdots+P(X_n=2\cap X_{n+1}=4)}_{=0}+P(X_n=3\cap X_{n+1}=4)\\
&\quad+\underbrace{P\left(X_n=4\cap X_{n+1}=4\right)}_{=0}+P\left(X_n=5\cap X_{n+1}=4\right)+\underbrace{P\left(X_n=6\cap X_{n+1}=4\right)}_{=0}\\
&= P(X_n=3)P_{(X_n=3)}P(X_{n+1}=4)+P\left(X_n=5)P_{(X_n=5)}P(X_{n+1}=4\right)=\frac{3}{6}P(X_n=3)+\frac{5}{6}P(X_n=5)\\
P\left(X_{n+1}=5\right) &= \underbrace{P(X_n=0\cap X_{n+1}=5)+\cdots+P(X_n=3\cap X_{n+1}=5)}_{=0}+P(X_n=4\cap X_{n+1}=5)\\
&\quad+\underbrace{P\left(X_n=5\cap X_{n+1}=5\right)}_{=0}+P\left(X_n=6\cap X_{n+1}=5\right)\\
&= P(X_n=4)P_{(X_n=4)}P(X_{n+1}=5)+P\left(X_n=6)P_{(X_n=6)}P(X_{n+1}=5\right)=\frac{2}{6}P(X_n=4)+\frac{6}{6}P(X_n=6)\\
P\left(X_{n+1}=6\right) &= \underbrace{P(X_n=0\cap X_{n+1}=6)+\cdots+P(X_n=4\cap X_{n+1}=6)}_{=0}+P\left(X_n=5\cap X_{n+1}=6\right)\\
&\quad+\underbrace{P\left(X_n=6\cap X_{n+1}=6\right)}_{=0}\\
&= P\left(X_n=5\right)P_{(X_n=5)}P\left(X_{n+1}=6\right)=\frac{1}{6}P(X_n=5)
\end{aligned}$$

Justification des calculs de probabilités : elle est identique à celle de la question 3, je laisse le lecteur le vérifier.
En résumé, on a

$$\begin{aligned}
P\left(X_{n+1}=0\right) &= \frac{1}{6}P(X_n=1)\quad P\left(X_{n+1}=6\right)=\frac{1}{6}P(X_n=5)\quad P\left(X_{n+1}=1\right)=\frac{6}{6}P(X_n=0)+\frac{2}{6}P(X_n=2)\\
P\left(X_{n+1}=2\right) &= \frac{5}{6}P(X_n=1)+\frac{3}{6}P(X_n=3)\quad P\left(X_{n+1}=3\right)=\frac{4}{6}P(X_n=2)+\frac{4}{6}P(X_n=4)\\
P\left(X_{n+1}=4\right) &= \frac{3}{6}P(X_n=3)+\frac{5}{6}P(X_n=5)\quad P\left(X_{n+1}=5\right)=\frac{2}{6}P(X_n=4)+\frac{6}{6}P(X_n=6)
\end{aligned}$$

6. En utilisant les relations de récurrence précédentes, on a

$$\begin{aligned}
E\left(X_{n+1}\right) &= \sum_{k=0}^{6} kP(X_{n+1}=k) \\
&= P(X_{n+1}=1)+2P(X_{n+1}=2)+3P(X_{n+1}=3)+4P(X_{n+1}=4)+5P(X_{n+1}=5)+6P(X_{n+1}=6) \\
&= \left\{\frac{6}{6}P(X_n=0)+\frac{2}{6}P(X_n=2)\right\}+2\left\{\frac{5}{6}P(X_n=1)+\frac{3}{6}P(X_n=3)\right\}+3\left\{\frac{4}{6}P(X_n=2)+\frac{4}{6}P(X_n=4)\right\} \\
&\quad +4\left\{\frac{3}{6}P(X_n=3)+\frac{5}{6}P(X_n=5)\right\}+5\left\{\frac{2}{6}P(X_n=4)+\frac{6}{6}P(X_n=6)\right\}+6\left\{\frac{1}{6}P(X_n=5)\right\} \\
&= P(X_n=0)+\frac{5}{3}P(X_n=1)+\frac{7}{3}P(X_n=2)+3P(X_n=3)+\frac{11}{3}P(X_n=4)+\frac{13}{3}P\left(X_n=5\right)+5P\left(X_n=6\right)
\end{aligned}$$

La relation demandée n'apparaissant directement, nous allons expliciter $E(X_{n+1})-\dfrac{2}{3}E(X_n)$

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}E(X_n) &= \frac{2}{3}P(X_n=1)+\frac{4}{3}P(X_n=2)+2P(X_n=3)+\frac{8}{3}P(X_n=4)+\frac{10}{3}P(X_n=5)+4P(X_n=6) \\
E(X_{n+1})-\frac{2}{3}E(X_n) &= P(X_n=0)+\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)P(X_n=1)+\left(\frac{7}{3}-\frac{4}{3}\right)P(X_n=2)+(3-2)\,P(X_n=3) \\
&\quad +\left(\frac{11}{3}-\frac{8}{3}\right)P\left(X_n=4\right)+\left(\frac{13}{3}-\frac{10}{3}\right)P\left(X_n=5\right)+(5-4)\,P\left(X_n=6\right) \\
&= P(X_n=0)+P(X_n=1)+P(X_n=2)+P(X_n=3)+P\left(X_n=4\right)+P\left(X_n=5\right)+P\left(X_n=6\right) \\
E(X_{n+1})-\frac{2}{3}E(X_n) &= 1
\end{aligned}$$

puisque les évènements $(X_n=k)_{k\in[\![0,6]\!]}$ forment un système complet d'évènements.
La suite $(E(X_n))_n$ étant arithmético-géométrique, on détermine pour commencer la constante L

$$L=\frac{2}{3}L+1\Leftrightarrow\frac{1}{3}L=1\Leftrightarrow L=3$$

La suite $u_n=E(X_n)-3\Leftrightarrow E(X_n)=u_n+3$ est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ car

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= E(X_{n+1})-3=\frac{2}{3}E(X_n)+1-3=\frac{2}{3}E(X_n)-2=\frac{2}{3}(u_n+3)-2=\frac{2}{3}u_n \\
&\Rightarrow\ u_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n u_0\Leftrightarrow E(X_n)-3=\left(\frac{2}{3}\right)^n(E(X_0)-3)\Leftrightarrow E(X_n)=3-\left(\frac{2}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

En effet, après 0 changement, c'est-à-dire à l'état initial, l'urne U_1 contient 2 boules donc $X_0=2$ et en particulier $E(X_0)=2$. Puisque $\dfrac{2}{3}\in]-1,1[$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}E(X_n)=3$.