correction de l'exercice 1

1. (a) La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme) et sa dérivée est $f'(x) = \frac{2}{5}x$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$4/5$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f étant croissante sur $[0,1]$ et sur $[4,+\infty[$, on a (je n'écris pas le tableau de variation) :

$$f([0,1]) = [\frac{4}{5}, 1] \subset [0,1] \qquad \text{et} \qquad f([4,+\infty[) = [4,+\infty[\subset [4,+\infty[$$

(b) Points fixes : $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{5}(4+x^2) = x \Leftrightarrow 4 + x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x \in \{1,4\}$

(c) On a : $f'(x) = \frac{2}{5}x$ donc $\forall x \in [0,1], \quad 0 \leqslant f'(x) \leqslant \frac{2}{5}$ ce qui implique que $\forall x \in [0,1], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{2}{5}$.

(*la distance de* $f'(x)$ *à* 0 *est au plus la distance de* 0 *à* $\frac{2}{5}$, *c'est-à-dire* $\frac{2}{5}$)

2. (a) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in [0,1]$
Initialisation : $u_0 \in [0,1]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n \in [0,1]$ donc $f(u_n) \in [0,1]$ (par stabilité de $[0,1]$ par f, d'après la question 1.a)) donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1]$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(b) La question 1.c) combinée au fait que f est C^1 sur $[0,1]$ permet d'utiliser l'inégalité des accroissements donc on a :

$$\forall x, y \in [0,1], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{2}{5}|x-y|.$$

En évaluant cette inégalité en $x = u_n$ (qui appartient à $[0,1]$) et $y = 1$ (qui appartient aussi à $[0,1]$!) puis en utilisant que $f(u_n) = u_{n+1}$, on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{2}{5}|u_n - 1|.$$

(c) Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $|u_n - 1| \leqslant (\frac{2}{5})^n$ ".
Initialisation : $|u_0 - 1| \leqslant 1$ (puisque $u_0 \in [0,1]$, la distance entre u_0 et 1 ne peut excéder la distance entre 0 et 1 donc elle est moindre que 1). Ensuite $\left(\frac{2}{5}\right)^0 = 1$, on en déduit que $(\mathcal{P}_0)$ est vrai.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Nous avons donc $|u_n - 1| \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n$ et la question précédente nous fournit l'inégalité $|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{2}{5}|u_n - 1|$ donc

$$|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{2}{5}|u_n - 1| \leqslant \frac{2}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(d) Puisqu'une valeur absolue est toujours positive, on a : $0 \leqslant |u_n - 1| \leqslant (\frac{2}{5})^n$ et la suite $(\frac{2}{5})^n$ tendant vers 0, le théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - 1| = 0$, c'est-à-dire $u_n \underset{n \to +\infty}{\rightarrow} 1$ (la distance entre u_n et 1 tend vers 0)

(e) Il suffit de demander que $(\frac{2}{5})^n \leqslant 10^{-10}$ (dans ce cas, $|u_n - 1| \leqslant (\frac{2}{5})^n \leqslant 10^{-10}$) et l'on a

$$(\frac{2}{5})^n \leqslant 10^{-10} \Leftrightarrow n \ln(\frac{2}{5}) \leqslant -10 \ln 10 \underset{\ln(\frac{2}{5}) \leqslant 0}{\Leftrightarrow} n \geqslant -\frac{10 \ln 10}{\ln(\frac{2}{5})}$$

Puisque $-\frac{10 \ln 10}{\ln(\frac{2}{5})} \simeq 25.13 \pm 10^{-2}$, on en déduit qu'il suffit que n soit plus grand que 26.

correction de l'exercice 2

1. (a) La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 1 - \frac{x}{2}$ qui s'annule pour $x = 2$ donc son tableau de variation est donné par

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$3/2$	$\searrow$	$+\infty$ $-\infty$

Points fixes : $f(x) = x \Leftrightarrow x + \frac{1}{4}(2 - x^2) = x \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{4}(2 - x^2) \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

(b) La fonction $f'(x) = 1 - \frac{x}{2}$ est décroissante (fonction affine de coefficient " directeur " -1) donc $\forall x \in [1,2], \quad 0 = f'(2) \leqslant f'(x) \leqslant f'(1) = \frac{1}{2}$ donc $\forall x \in [1,2], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$

(*la distance entre $f'(x)$ et 0 est au plus la distance entre 0 et $\frac{1}{2}$ c'est-à-dire au plus $\frac{1}{2}$*).

La fonction f est croissante sur $[1,2](\subset]-\infty,2])$ donc $f([1,2]) = [f(1), f(2)] = [\frac{5}{4}, \frac{3}{2}] \subset [1,2]$ (je ne fais pas le tableau, mais pensez à le faire)

2. (a) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in [1,2]$
Initialisation : $u_0 = 1 \in [1,2]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n \in [1,2]$ donc $f(u_n) \in [1,2]$ (par stabilité de $[1,2]$ par f, d'après la question 1.a)) donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [1,2]$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(b) La question 1.b) combinée au fait que f est C^1 sur $[1,2]$ permet d'utiliser l'inégalité des accroissements donc on a :

$$\forall x, y \in [1,2], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x - y|.$$

En évaluant cette inégalité en $x = u_n$ (qui appartient à $[1,2]$) et $y = \sqrt{2}$ (qui appartient aussi à $[1,2]$!) puis en utilisant que $f(u_n) = u_{n+1}$, on obtient que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|.$$

(c) Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant (\frac{1}{2})^n$ ".
Initialisation : $\left|u_0 - \sqrt{2}\right| = \left|1 - \sqrt{2}\right| \leqslant 1$ (puisque la distance entre 1 et $\sqrt{2}$ ne peut excéder la distance entre 1 et 2 donc elle est moindre que 1). Ensuite $\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$, on en déduit que $(\mathcal{P}_0)$ est vrai.

Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Nous avons donc $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et la question précédente nous fournit l'inégalité $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right|$ donc

$$\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(d) Puisqu'une valeur absolue est toujours positive, on a : $0 \leqslant \left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant (\frac{1}{2})^n$ et la suite $(\frac{1}{2})^n$ tendant vers 0, le théorème d'encadrement montre que $\lim_{n\to+\infty} \left|u_n - \sqrt{2}\right| = 0$, c'est-à-dire $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \sqrt{2}$ (la distance entre u_n et $\sqrt{2}$ tend vers 0)

(e) Il suffit de demander que $(\frac{1}{2})^n \leqslant 10^{-9}$ (dans ce cas, $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant (\frac{1}{2})^n \leqslant 10^{-9}$) et l'on a

$$(\frac{1}{2})^n \leqslant 10^{-9} \Leftrightarrow n\ln(\frac{1}{2}) \leqslant -9\ln 10 \underset{\ln(\frac{1}{2})\leqslant 0}{\Leftrightarrow} n \geqslant -\frac{9\ln 10}{\ln(\frac{1}{2})}$$

Puisque $-\frac{9\ln 10}{\ln(\frac{1}{2})} \simeq 29.90 \pm 10^{-2}$, on en déduit qu'il suffit que n soit plus grand que 30.

correction de l'exercice 3

1. (a) La fonction f est C^1 sur $\mathbb{R}_+^\times$ (car $x \mapsto \ln x$ l'est) et sa dérivée est $f'(x) = -\frac{1}{4x}$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

La fonction f étant décroissante sur $[3,4]$, on a $f([3,4]) = [f(4), f(3)] \subset [3,4]$ (puisque $f(4) \simeq 3.65 \pm 10^{-2}$ et $f(3) \simeq 3.72 \pm 10^{-2}$)

(b) L'équation $f(x) = x$ ne pouvant être résolue par des méthodes algébriques usuelles (équations du premier ou second degré, équations $ab = 0$, changement de variable, etc.), on introduit la fonction g définie sur $[3,4]$ par : $\forall x \in [3,4], \quad g(x) = f(x) - x = 4 - \frac{\ln x}{4} - x.$
La fonction g est la somme de deux fonctions strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\times$ d'où elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^\times$ donc sur $[3,4]$ (on peut également dire que $f'(x) = -\frac{1}{4x} - 1 < 0$ sur $[3,4]$)
La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[3,4]$ donc elle réalise

une bijection de $[3,4]$ sur $[g(4), g(3)]$. Puisque $g(3) = f(3) - 3 \simeq 0.72 \pm 10^{-2}$ et $g(4) = f(4) - 4 \simeq -0.35 \pm 10^{-2}$, on en déduit que $0 \in [g(4), g(3)]$. Par conséquent, l'équation $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = x$ admet une et une seule solution sur $[3,4]$ (existence et unicité de l'antécédent que 0 par g sur $[3,4]$)

(c) On a : $\forall x \in [3,4], \quad f'(x) = -\frac{1}{4x}$ donc $-\frac{1}{12} \leqslant f'(x) \leqslant -\frac{1}{16}$ (encadrement à la main ou en utilisant la croissance de f') ce qui implique que $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{12}$ (la distance de $f'(x)$ à 0 est moindre que la distance de $-\frac{1}{12}$ à 0, c'est-à-dire $\frac{1}{12}$). Puisque $\frac{1}{12} \leqslant \frac{1}{10}$, on en déduit que $\forall x \in [3,4], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{10}$.

2. (a) On est bien tenté d'appliquer l'inégalité des accroissements finis sur $[3,4]$ (puisque la question 1.c) s'y réfère clairement) mais on ne sait pas que tous les termes u_n de la suite u sont bien dans $[3,4]$ donc nous devons le montrer au préalable.
Pour cela, on procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in [3,4]$
Initialisation : $u_0 \in [3,4]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n \in [3,4]$ donc $f(u_n) \in [3,4]$ (par stabilité de $[3,4]$ par f, d'après la question 1.a)) donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [3,4]$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

La question 1.c) nous permet d'utiliser l'inégalité des accroissements à f sur l'intervalle $[3,4]$, ce qui nous donne :
$$\forall x, y \in [3,4], \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{10} |x - y|.$$
En évaluant cette inégalité en $x = u_n$ (qui appartient à $[3,4]$) et $y = L$ (qui appartient aussi à $[3,4]$!) puis en utilisant que $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(L) = L$ (L est quand même un point fixe !), on obtient que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - L| \leqslant \frac{1}{10} |u_n - L|.$$

(b) Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $|u_n - L| \leqslant \frac{1}{10^n}$ ".
Initialisation : $|u_0 - L| \leqslant 1$ (puisque u_0 et L appartiennent à $[3,4]$, la distance entre u_0 et L ne peut excéder la distance entre 3 et 4 donc elle est moindre que 1). Ensuite $\frac{1}{10^0} = 1$, on en déduit que $(\mathcal{P}_0)$ est vrai.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Nous avons donc $|u_n - L| \leqslant \frac{1}{10^n}$ et la question précédente nous fournit l'inégalité $|u_{n+1} - L| \leqslant \frac{1}{10} |u_n - L|$ donc
$$|u_{n+1} - L| \leqslant \frac{1}{10} |u_n - L| \leqslant \frac{1}{10} \times \frac{1}{10^n} = \frac{1}{10^{n+1}}$$
ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(c) Il suffit de demander que $\frac{1}{10^n} \leqslant 10^{-4}$ (dans ce cas, $|u_n - L| \leqslant \frac{1}{10^n} \leqslant 10^{-4}$) et l'on a
$$\frac{1}{10^n} \leqslant 10^{-4} \Leftrightarrow 10^{-n} \leqslant 10^{-4} \Leftrightarrow -n \leqslant -4 \Leftrightarrow n \geqslant 4$$
On en déduit qu'il suffit que n soit plus grand que 9.
Remarque : la suite u converge vers L, même si cela n'est pas demandé par l'énoncé !

correction de l'exercice 4

1. L'équation $f(x) = x$ ne pouvant être résolue par des méthodes algébriques usuelles (équations du premier ou second degré, équations $ab = 0$, changement de variable, etc.), on introduit la fonction g définie sur $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1], \quad g(x) = f(x) - x = \ln(-x^2 + x + 2) - x$.

   Justifions que la fonction g est C^1 sur $[0,1]$, ce qui revient à montrer que la fonction $-x^2 + x + 2$ est continue sur $[0,1]$ (ce qui est trivial) et qu'elle est strictement positive sur $[0,1]$. Pour cela, on constate qu'il s'agit d'un trinôme dont les racines sont -1 et 2 donc ce trinôme est strictement positif (de $-a$) entre les deux racines (exclues) donc $-x^2 + x + 2$ est strictement positif sur $[0,1]$

   Justifions maintenant la monotonie de g sur $[0,1]$. La dérivée de g est donnée par
$$g'(x) = \frac{(-x^2 + x + 2)'}{-x^2 + x + 2} - 1 = \frac{-2x + 1}{-x^2 + x + 2} - 1 = \frac{x^2 - 3x - 1}{-x^2 + x + 2}$$
   Le trinôme $x^2 - 3x + 1$ possédant deux racines $x_+ = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \simeq 3.30 \pm 10^{-2}$ et $x_- = \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \simeq -0.30 \pm 10^{-2}$ et que ce trinôme est négatif entre les racines donc $x^2 - 3x + 1 > 0$ sur $[0,1]$.
   Ainsi, la fonction $g'(x) < 0$ et la fonction g est strictement décroissante sur $[0,1]$. Puisqu'elle est en outre continue sur $[0,1]$, on en déduit qu'elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur $g([0,1]) = [g(1), g(0)] = [\underbrace{\ln 2 - 1}_{<0}, \underbrace{\ln 2}_{>0}]$. Comme $0 \in [\ln 2 - 1, \ln 2]$, l'équation $g(x) = 0 \Longleftrightarrow f(x) = x$ admet une et une seule solution sur $[0,1]$ (existence et unicité de l'antécédent de 0 par g sur $[0,1]$)

2. (a) Nous avons vu à la question 1. que la fonction $x \mapsto -x^2+x+2$ est strictement positive sur $[0,1]$ et comme elle est C^2 sur $[0,1]$, on en déduit que $x \mapsto \ln\ln(-x^2+x+2)$ est de classe C^2 sur $[0,1]$.

(b) La question 1. nous permet d'écrire que $\forall x \in [0,1], \quad f'(x) = \dfrac{-2x+1}{-x^2+x+2}$ et on conclut par le calcul suivant :
$$\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2} = \frac{x-2}{(x+1)(x-2)}+\frac{x+1}{(x+1)(x-2)} = \frac{2x-1}{x^2-x-2} = \frac{-2x+1}{-x^2+x+2} = f'(x)$$

(c) Puisque $f'(x)$ s'écrit comme la somme de deux fonctions décroissantes sur $[0,1]$ (les $\dfrac{1}{x-a}$), on en déduit que $f'(x)$ est strictement décroissante sur $[0,1]$ (on peut également calculer sa dérivée $f''(x) = -\dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{(x-2)^2} < 0$ sur $[0,1]$) donc
$$\forall x \in [0,1], \quad -\frac{1}{2} = f(1) \leqslant f'(x) \leqslant f(0) = \frac{1}{2}.$$
Remarque : cela implique que $\forall x \in [0,1], \quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ *(la distance de $f'(x)$ à 0 est au plus la distance de $\dfrac{1}{2}$ à 0 ou $-\dfrac{1}{2}$ à 0, c'est-à-dire à $\dfrac{1}{2}$)*

(d) On dresse le tableau de variation de f (en se rappelant que $-x^2+x+2$ est positif sur $[0,1]$, cf. question 1.)

x	0		$1/2$		1
$-2x+1$		$+$		$-$	
$\dfrac{-2x+1}{-x^2+x+2}$		$+$		$-$	
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	$\ln 2$	$\nearrow$	$\ln(9/2)$	$\searrow$	$+\infty$ $\ln 2$

donc $f([0,1]) = [\ln 2, \ln(\frac{9}{4})] \subset [0,1]$ car $\ln 2 \simeq 0.70 \pm 10^{-2}$ et $\ln(\frac{9}{4}) \simeq 0.81 \pm 10^{-2}$

3. (a) On procède par récurrence en posant $(\mathcal{P}_n) : u_n \in [0,1]$
Initialisation : $u_0 = 0 \in [0,1]$ donc $(\mathcal{P}_0)$ est vraie.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. $u_n \in [0,1]$ donc $f(u_n) \in [0,1]$ (par stabilité de $[0,1]$ par f, d'après la question 1.a)) donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1]$ ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.Montrer que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \in [0,1]$

(b) La question 2.c) combinée au fait que f est C^1 sur $[0,1]$ permet d'utiliser l'inégalité des accroissements donc on a :
$$\forall x,y \in [0,1], \quad |f(x)-f(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|.$$
En évaluant cette inégalité en $x = u_n$ (qui appartient à $[0,1]$) et $y = \alpha$ (qui appartient aussi à $[0,1]$!) puis en utilisant que $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(\alpha) = \alpha$ (α est un point fixe de f), on obtient que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha|.$$

(c) Posons $(\mathcal{P}_n)$: " $|u_n-\alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ ".
Initialisation : $|u_0-\alpha|$ et $\dfrac{1}{2^0}|u_0-\alpha| = |u_0-\alpha|$, on en déduit que $(\mathcal{P}_0)$ est vrai.
Hérédité : Supposons que $(\mathcal{P}_n)$ est vraie. Nous avons donc $|u_n-\alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0-\alpha|$ et la question précédente nous fournit l'inégalité $|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$ donc
$$|u_{n+1}-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n-\alpha| \leqslant \frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n}|u_0-\alpha| = \frac{1}{2^{n+1}}|u_0-\alpha|$$
ce qui démontre $(\mathcal{P}_{n+1})$ et achève la récurrence.

(d) Puisqu'une valeur absolue est toujours positive, on a : $0 \leqslant |u_n-\alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}|u_0-\alpha|$ et la suite $\dfrac{1}{2^n}|u_0-\alpha|$ tendant vers 0, le théorème d'encadrement montre que $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-\alpha| = 0$, c'est-à-dire $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} \alpha$ (la distance entre u_n et α tend vers 0)

(e) Il suffit de demander que $\dfrac{1}{2^N} \leqslant 10^{-8}$ (dans ce cas, $|u_N-\alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^N}|u_0-\alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^N} \leqslant 10^{-8}$ puisque $|u_0-\alpha| = |0-\alpha| = \alpha \leqslant 1$) et l'on a
$$\frac{1}{2^N} \leqslant 10^{-8} \Leftrightarrow N\ln(\frac{1}{2}) \leqslant -8\ln 10 \underset{\ln(\frac{1}{2})\leqslant 0}{\Leftrightarrow} N \geqslant -\frac{8\ln 10}{\ln(\frac{1}{2})}$$
Puisque $-\dfrac{8\ln 10}{\ln(\frac{1}{2})} \simeq 26.57 \pm 10^{-2}$, on en déduit qu'il suffit que N soit plus grand que 27.