correction de l'exercice 1
Nous utiliserons la caractérisation des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel.

1. L'ensemble A est inclu dans $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel mais il ne contient pas $0_{2,1}$ (*l'élément nul de* $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$) car $0+0 \neq 1$ (il parait même que le résultat est égal à la tête à toto :-)) donc A n'est pas un espace vectoriel.

2. L'ensemble B est inclu dans $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel.
L'ensemble B n'est pas vide car il contient $0_{3,1}$ (*l'élément nul* de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) car
$$2\times 0 - 5\times 0 + 0 = 0 \quad \text{et} \quad 0+0=0$$
Stabilité par combinaison linéaire : Soient $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux éléments de B ainsi que deux réels λ et μ. L'élément $\lambda X + \mu X' = \begin{pmatrix} \lambda x + \mu x' \\ \lambda y + \mu y' \\ \lambda z + \mu z' \end{pmatrix}$ appartient-il à B ? c'est-à-dire dispose-t-on nous de l'implication suivante ?
$$\left(\begin{cases} 2x - 5y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \text{et} \quad \begin{cases} 2x' - 5y' + z' = 0 \\ y' + z' = 0 \end{cases} \right) \Rightarrow \begin{cases} 2(\lambda x + \mu x') - 5(\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') = 0 \\ (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') = 0 \end{cases}$$
Pour cela, nous allons développer puis de regrouper les termes en λ et les termes en μ
$$\begin{aligned} 2(\lambda x + \mu x') - 5(\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') &= \lambda(2x + -5\lambda y + z) + \mu(2x' - 5y' + z') = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0 \\ (\lambda y + \mu y') + (\lambda z + \mu z') &= \lambda(y+z) + \mu(y'+z') = \lambda\times 0 + \mu \times 0 = 0 \end{aligned}$$
ce qui montre que B est stable par combinaison linéaire. Par conséquent, l'ensemble B est bien un espace vectoriel.
Remarque : *nous utilisons les coordonnées car l'ensemble B est défini par des relations sur les coordonnées.*

3. L'ensemble C est inclu dans $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel mais il ne contient pas $0_{3,1}$ (*l'élément nul de* $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$) car $0+0-2\times 0 = 0 \neq -1$ donc C n'est pas un espace vectoriel.

4. L'ensemble D est inclu dans $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel.
L'ensemble D n'est pas vide car il contient $0_{2,1}$ (*l'élément nul* de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) car $0^2+0=0$.
Stabilité par combinaison linéaire : Soient $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ deux éléments de D ainsi que deux réels λ et μ. L'élément $\lambda X + \mu X' = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu a' \\ \lambda b + \mu b' \end{pmatrix}$ appartient-il à D ? c'est-à-dire dispose-t-on nous de l'implication suivante ?
$$\big(a^2 + b = 0 \quad \text{et} \quad (a')^2 + b'\big) \Rightarrow (\lambda a + \mu a')^2 + \lambda b + \mu b' = 0$$
Pour cela, nous allons développer puis de regrouper les termes en λ et les termes en μ
$$(\lambda a + \mu a')^2 + \lambda b + \mu b' = \lambda^2 a^2 + 2\lambda\mu a a' + \mu^2 (a')^2 + \lambda b + \mu b'$$
On ne voit aucune simplification possible et les termes de la somme n'étant pas linéaire en λ, μ, on se dit que D ne doit pas être un espace vectoriel. Pour le justifier, il suffit de trouver un contre-exemple. On considère le vecteur $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ qui appartient à D car $1^2 + (-1) = 0$. Par contre, le vecteur $2X = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ n'appartient pas à D car $2^2 + (-2) = 2 \neq 0$ donc D n'est pas un espace vectoriel.
Remarque : *nous utilisons les coordonnées car l'ensemble D est défini par des relations sur les coordonnées.*

5. L'ensemble E est inclu dans $\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel.
L'ensemble E n'est pas vide car il contient $0_{4,1}$ (*l'élément nul* de $\mathfrak{M}_{4,1}(\mathbb{R})$) car
$$0 - 2\times 0 - 3\times 0 - 4\times 0 = 0$$
Stabilité par combinaison linéaire : Soient $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix}$ deux éléments de E ainsi que deux réels λ et μ. L'élément $\lambda X + \mu X' = \begin{pmatrix} \lambda a + \mu a' \\ \lambda b + \mu b' \\ \lambda c + \mu c' \\ \lambda d + \mu d' \end{pmatrix}$ appartient-il à E ? c'est-à-dire dispose-t-on nous de l'implication suivante ?
$$(a - 2b - 3c - 4d = 0 \quad \text{et} \quad a' - 2b' - 3c' - 4d' = 0) \Rightarrow (\lambda a + \mu a') - 2(\lambda b + \mu b') - 3(\lambda c + \mu c') - 4(\lambda d + \mu d') = 0$$

Pour cela, nous allons développer puis de regrouper les termes en λ et les termes en μ

$$(\lambda a+\mu a')-2(\lambda b+\mu b')-3(\lambda c+\mu c')-4(\lambda d+\mu d')=\lambda(a-2b-3c-4d)+\mu(a'-2b'-3c'-4d')=\lambda\times 0+\mu\times 0=0$$

ce qui montre que E est stable par combinaison linéaire. Par conséquent, l'ensemble E est bien un espace vectoriel.
Remarque : *nous utilisons les coordonnées car l'ensemble E est défini par des relations sur les coordonnées.*

6. L'ensemble F est inclu dans $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel.
L'ensemble F n'est pas vide car il contient $0_{3,1}$ (*l'élément nul* de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) car

$$\begin{cases} 0-2\times 0+0=0 \\ 0-2\times 0+0=0 \\ 0-2\times 0+0=0 \end{cases}$$

Stabilité par combinaison linéaire : Soient $X=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $X'=\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux éléments de F ainsi que deux réels λ et μ. L'élément $\lambda X+\mu X'=\begin{pmatrix} \lambda a+\mu a' \\ \lambda b+\mu b' \\ \lambda c+\mu c' \end{pmatrix}$ appartient-il à F ? c'est-à-dire dispose-t-on nous de l'implication suivante ?

$$\left(\begin{cases} a-2b+c=0 \\ b-2a+c=0 \\ c-2b+a=0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a'-2b'+c'=0 \\ b'-2a'+c'=0 \\ c'-2b'+a'=0 \end{cases}\right) \Rightarrow \begin{cases} (\lambda a+\mu a')-2(\lambda b+\mu b')+(\lambda c+\mu c')=0 \\ (\lambda b+\mu b')-2(\lambda a+\mu a')+(\lambda c+\mu c')=0 \\ (\lambda c+\mu c')-2(\lambda b+\mu b')+(\lambda a+\mu a')=0 \end{cases}$$

Pour cela, nous allons développer puis de regrouper les termes en λ et les termes en μ

$$\begin{cases} (\lambda a+\mu a')-2(\lambda b+\mu b')+(\lambda c+\mu c')=\lambda(a-2b+c)+\mu(a'-2b'+c')=\lambda\times 0+\mu\times 0=0 \\ (\lambda b+\mu b')-2(\lambda a+\mu a')+(\lambda c+\mu c')=\lambda(b-2a+c)+\mu(b'-2a'+c')=\lambda\times 0+\mu\times 0=0 \\ (\lambda c+\mu c')-2(\lambda b+\mu b')+(\lambda a+\mu a')=\lambda(c-2b+a)+\mu(c'-2b'+a')=\lambda\times 0+\mu\times 0=0 \end{cases}$$

ce qui montre que F est stable par combinaison linéaire. Par conséquent, l'ensemble F est bien un espace vectoriel.
Remarque : *nous utilisons les coordonnées car l'ensemble F est défini par des relations sur les coordonnées.*

7. L'ensemble G est inclu dans $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel.
L'ensemble G n'est pas vide car il contient $0_{2,1}$ (*l'élément nul* de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$) car

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Stabilité par combinaison linéaire : Soient X et X' deux éléments de G ainsi que deux réels λ et μ. L'élément $\lambda X+\mu X'$ appartient-il à G ? c'est-à-dire dispose-t-on nous de l'implication suivante ?

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}X=3X \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}X'=3X'\right] \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}(\lambda X+\mu X')=3(\lambda X+\mu X')$$

Pour cela, nous allons développer puis de regrouper les termes en λ et les termes en μ

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}(\lambda X+\mu X')=\lambda\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}X+\mu\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}X'=\lambda(3X)+\mu(3X')=3(\lambda X+\mu X')$$

ce qui montre que G est stable par combinaison linéaire. Par conséquent, l'ensemble G est bien un espace vectoriel.
Remarque : *nous n'utilisons pas les coordonnées car l'ensemble G est défini par des relations sur l'élément X directement.*

8. L'ensemble H est inclu dans $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel mais il ne contient pas $0_{2,1}$ (*l'élément nul de* $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$) car

$$\left[\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\neq 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

donc H n'est pas un espace vectoriel.
Remarque : *nous n'utilisons pas les coordonnées car l'ensemble H est défini par des relations sur l'élément X directement.*

9. L'ensemble K est inclu dans $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel.
   L'ensemble K n'est pas vide car il contient $0_{3,1}$ (*l'élément nul* de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$) car
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
   Stabilité par combinaison linéaire : Soient X et X' deux éléments de K ainsi que deux réels λ et μ. L'élément $\lambda X+\mu X'$ appartient-il à K ? c'est-à-dire dispose-t-on nous de l'implication suivante ?
$$\left[\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}X=X\quad\text{et}\quad\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}X'=3X'\right]\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}(\lambda X+\mu X')=\lambda X+\mu X'$$
   Pour cela, nous allons développer puis de regrouper les termes en λ et les termes en μ
$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}(\lambda X+\mu X')=\lambda\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}X+\mu\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\\2&3&1\end{pmatrix}X'=\lambda X+\mu X'$$
   ce qui montre que K est stable par combinaison linéaire. Par conséquent, l'ensemble K est bien un espace vectoriel.
   Remarque : *nous n'utilisons pas les coordonnées car l'ensemble K est défini par des relations sur l'élément X directement.*

correction de l'exercice 2

1. Le vecteur X est une combinaison linéaire de deux vecteurs e_1 et e_2 si et seulement il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que
$$X=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2.$$
   Si l'on considère les coordonnées de $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, on peut écrire la relation précédente sous la forme d'un système, en λ_1,λ_2, que l'on résout par pivot de Gauss.
$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2=x\\-\lambda_1+\lambda_2=y\\2\lambda_1-\lambda_2=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2&=&x&\textit{Pivot pour }\lambda_1\\2\lambda_2&=&x+y&L_2\leftarrow L_2+L_1\\-3\lambda_2&=&-2x+z&L_3\leftarrow L_3-2L_1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2&=&x\\2\lambda_2&=&x+y&\textit{Pivot pour }\lambda_2\\0&=&-x+3y+2z&L_3\leftarrow 2L_3+3L_2\end{cases}$$
   Par conséquent, le système $X=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2$ admet des solutions en λ_1,λ_2 ssi $-x+3y+2z=0$ où $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ Dans ce cas, la solution est unique et donnée par
$$(\lambda_1,\lambda_2)=\left(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2}\right)\Leftrightarrow X=\left(\frac{x+y}{2}\right)e_1+\left(\frac{x-y}{2}\right)e_2$$
2. Il est immédiat que seuls les vecteurs A, C, E sont combinaisons linéaires de e_1,e_2 et les combinaisons sont données par
$$A=2e_1+e_2,\quad C=3e_1+7e_2,\quad E=-2e_1+3e_2$$

correction de l'exercice 3

1. Le vecteur X est une combinaison linéaire de deux vecteurs e_1,e_2 et e_3 si et seulement il existe trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que
$$X=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\lambda_3e_3.$$
   Si l'on considère les coordonnées de $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, on peut écrire la relation précédente sous la forme d'un système, en λ_1,λ_2 et λ_3 que l'on résout par pivot de Gauss.
$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=x\\\lambda_1+2\lambda_2+2\lambda_3=y\\\lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3&=&x&\textit{Pivot pour }\lambda_1\\\lambda_2+\lambda_3&=&y-x&L_2\leftarrow L_2-L_1\\\lambda_2+2\lambda_3&=&z-x&L_3\leftarrow L_3-L_1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3&=&x\\\lambda_2+\lambda_3&=&y-x&\textit{Pivot pour }\lambda_2\\\lambda_3&=&z-y&L_3\leftarrow L_3-L_2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_3&=&z-y\\\lambda_2&=&2y-x-z\\\lambda_1&=&2x-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1&=&2x-y\\\lambda_2&=&-x+2y-z\\\lambda_3&=&-y+z\end{cases}$$

Par conséquent, tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire de e_1, e_2, e_3, la combinaison est unique et elle donnée par

$$X = (2x - y)e_1 + (-x + 2y - z)e_2 + (-y + z)e_3$$

2. Le vecteur X est une combinaison linéaire de deux vecteurs e_1, e_2 si et seulement il existe deux réels λ_1, λ_2 tels que

$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$$

Si l'on considère les coordonnées de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on peut écrire la relation précédente sous la forme d'un système, en λ_1, λ_2 que l'on résout par pivot de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = y \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} \lambda_1 + \lambda_2 & = & x & \textit{Pivot pour } \lambda_1 \\ \lambda_2 & = & y - x & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda_2 & = & z - x & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} \lambda_1 + \lambda_2 & = & x & \\ \lambda_2 & = & y - x & \textit{Pivot pour } \lambda_2 \\ 0 & = & z - y & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

Par conséquent, ce système n'admet pas toujours des solutions (c'est le cas ssi $z - y \neq 0$), c'est-à-dire le vecteur X n'est pas combinaison linéaire de e_1, e_2 lorsque $z - y \neq 0$ et tout vecteur de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ n'est pas nécessairement une combinaison linéaire de e_1, e_2.

3. Le vecteur X est une combinaison linéaire de trois vecteurs e_1, e_2 et $\widetilde{e_3}$ si et seulement il existe trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 \widetilde{e_3}.$$

Si l'on considère les coordonnées de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on peut écrire la relation précédente sous la forme d'un système, en λ_1, λ_2 et λ_3 que l'on résout par pivot de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = y \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - 4\lambda_3 = z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & x & \textit{Pivot pour } \lambda_1 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 & = & y - x & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 & = & z - x & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & x & \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & y - x & \textit{Pivot pour } \lambda_2 \\ 0 & = & z - y & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

Par conséquent, ce système n'admet pas toujours des solutions (c'est le cas ssi $z - y \neq 0$), c'est-à-dire le vecteur X n'est pas combinaison linéaire de $e_1, e_2, \widetilde{e_3}$ lorsque $z - y \neq 0$ et tout vecteur de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ n'est pas nécessairement une combinaison linéaire de $e_1, e_2, \widetilde{e_3}$.

4. Le vecteur X est une combinaison linéaire de quatre vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ si et seulement il existe quatre réels λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 tels que

$$X = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si l'on considère les coordonnées de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on peut écrire la relation précédente sous la forme d'un système, en λ_1, λ_2, λ_3 et λ_4 que l'on résout par pivot de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{lcc} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 & = & x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 & = & y \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \lambda_4 & = & z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & x & \textit{Pivot pour } \lambda_1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = & y - x & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = & z - x & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccc} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & x & \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = & y - x & \textit{Pivot pour } \lambda_2 \\ 0 & = & z - y & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

Par conséquent, ce système n'admet pas toujours des solutions (c'est le cas ssi $z - y \neq 0$), c'est-à-dire le vecteur X n'est pas combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ lorsque $z - y \neq 0$ et tout vecteur de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ n'est pas nécessairement une combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

correction de l'exercice 4

Rappellons qu'une base $(e_1, .., e_r)$ de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est une famille à la fois génératrice et libre. Cela se traduit également par le fait que tout vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est une combinaison linéaire de $(e_1, .., e_r)$ et que cette combinaison est unique.
Autrement dit, le système linéaire en $\lambda_1, .., \lambda_r$ induit par l'égalité $X = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_r e_r$ doit être un système (S_r) admet une et une seule solution, c'est-à-dire qu'il doit être de Cramer.). Le système (S_r) est à r inconnues et 3 équations et l'on sait qu'un système de Cramer est nécessairement carré (la réciproque est fausse !!). Par conséquent, pour que la famille $(e_1, .., e_r)$ soit une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il est indispensable que $r = 3$ (la réciproque est fausse).
De cette analyse, on en déduit immédiatement que les familles $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_5$ ne peuvent être des bases.Il reste à traiter les trois autres familles.

$\boxed{\mathcal{B}_2}$ Le vecteur X est une combinaison linéaire de deux vecteurs e_1, e_2 et e_3 si et seulement il existe trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3.$$

Si l'on considère les coordonnées de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on peut écrire la relation précédente sous la forme d'un système, en λ_1, λ_2 et λ_3 que l'on résout par pivot de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 & = & x \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = & y \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = & z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lclc} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 & = & x & \textit{Pivot pour } \lambda_1 \\ -2\lambda_2 - 2\lambda_3 & = & y - x & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -2\lambda_2 - 2\lambda_3 & = & z - x & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lclc} \lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 & = & x & \\ -2\lambda_2 - 2\lambda_3 & = & y - x & \textit{Pivot pour } \lambda_2 \\ 0 & = & z - y & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

Ce système n'admet donc aucune solution lorsque $z - y \neq 0$ donc la famille $\mathcal{B}_2$ n'est pas une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$\boxed{\mathcal{B}_3}$ Le vecteur X est une combinaison linéaire de deux vecteurs e_1, e_2 et e_3 si et seulement il existe trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3.$$

Si l'on considère les coordonnées de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on peut écrire la relation précédente sous la forme d'un système, en λ_1, λ_2 et λ_3 que l'on résout par pivot de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 + \lambda_3 & = & x \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & y \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lclc} \lambda_1 + \lambda_3 & = & x & \textit{Pivot pour } \lambda_1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & y & \\ \lambda_2 - \lambda_3 & = & z - x & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lclc} \lambda_1 + \lambda_3 & = & x & \\ \lambda_2 + \lambda_3 & = & y & \textit{Pivot pour } \lambda_2 \\ -2\lambda_3 & = & z - x - y & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

Par conséquent, le système est de Cramer (système triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls) donc la famille $\mathcal{B}_3$ est une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

$\boxed{\mathcal{B}_4}$ Le vecteur X est une combinaison linéaire de deux vecteurs e_1, e_2 et e_3 si et seulement il existe trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 tels que

$$X = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3.$$

Si l'on considère les coordonnées de $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on peut écrire la relation précédente sous la forme d'un système, en λ_1, λ_2 et λ_3 que l'on résout par pivot de Gauss.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & x \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = & y \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 & = & z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lclc} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & = & x & \textit{Pivot pour } \lambda_1 \\ -2\lambda_2 & = & y - x & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ -2\lambda_3 & = & z - x & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

Par conséquent, le système est de Cramer (système triangulaire à coefficients diagonaux tous non nuls) donc la famille $\mathcal{B}_4$ est une base de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$

correction de l'exercice 5

1. L'ensemble F est inclu dans $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel.
   L'ensemble F n'est pas vide car il contient $0_{3,1}$ (*l'élément nul* de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$) car

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Stabilité par combinaison linéaire : Soient X et X' deux éléments de F ainsi que deux réels λ et μ. L'élément $\lambda X + \mu X'$ appartient-il à F ? c'est-à-dire dispose-t-on nous de l'implication suivante ?

$$\left[\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 2 & -4 & 4\end{pmatrix} X = 2X \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 2 & -4 & 4\end{pmatrix} X' = 2X'\right] \Rightarrow \begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 2 & -4 & 4\end{pmatrix}(\lambda X + \mu X') = 2(\lambda X + \mu X')$$

Pour cela, nous allons développer puis de regrouper les termes en λ et les termes en μ

$$\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 2 & -4 & 4\end{pmatrix}(\lambda X + \mu X') = \lambda \begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 2 & -4 & 4\end{pmatrix} X + \mu \begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 2 & -4 & 4\end{pmatrix} X' = \lambda(2X) + \mu(2X') = 2(\lambda X + \mu X')$$

ce qui montre que F est stable par combinaison linéaire. Par conséquent, l'ensemble F est bien un espace vectoriel.
Remarque : *nous n'utilisons pas les coordonnées car l'ensemble F est défini par des relations sur l'élément X directement.*Montrer que est un espace vectoriel.

2. Soit $X = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ un élement de F

$$\begin{pmatrix}3 & -2 & 1\\ 2 & -2 & 2\\ 2 & -4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y + z = 2x\\ 2x - 2y + 2z = 2y\\ 2x - 4y + 4z = 2z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0\\ 2x - 4y + 2z = 0\\ 2x - 4y + 2z = 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 & \textit{Pivot pour } x\\ 0 = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1\\ 0 = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1\end{cases} \Leftrightarrow x = 2y - z \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix}2y - z\\ y\\ z\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

Par conséquent, la famille $\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ est une famille génératrice de F.

3. Il suffit de montrer qu'elle est libre

$$\alpha\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha - \beta = 0\\ \alpha = 0\\ \beta = 0\end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0$$

Par conséquent, la famille $\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$ est une base de F.