Exercice 1
Une urne contient dix boules rouges et cinq boules vertes. On pioche simultanément six boules et on note R (resp. V) le nombre de boules rouges (resp. vertes) obtenues.
Déterminer la loi, l'espérance et la variance de R (resp. V). Les variables R et V sont-elles indépendantes ? Refaire l'exercice lorsque l'on pioche avec remise.

Exercice 2
Un service après-vente dispose d'équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique. Les appels se produisent de façon indépendante, et la probabilité qu'un retard se produise dans le dépannage à la suite d'un appel est $p = \dfrac{1}{4}$.

1. Un même client a appelé le service à 8 dates différentes. Soit X le nombre de retards que ce client a subi. Définir la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. On considère un ensemble de 8 clients différents. 2 d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont subi un retard. On contacte 4 clients parmi les 8. Soit M le nombre de clients mécontents parmi les 4 contactés.
   Définir la loi de M. La donner explicitement. Calculer $E(M)$.

Exercice 3
Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. Un joueur tire successivement n boules avec remise. S'il tire une boule blanche, il gagne 2 points, sinon il en perd 3. Soit X_n le nombre de boules blanches et Y_n le nombre de points obtenus.
Déterminer la loi de X_n, puis $E(X_n)$ et $V(X_n)$.
Exprimer Y_n en fonction de X_n. En déduire la loi de Y_n, puis $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

Exercice 4
Une piste rectiligne est divisée en cases numérotées $0, 1, 2, \ldots, n$, de gauche à droite. Une puce se déplace vers la droite de une ou deux cases au hasard à chaque saut. Au départ, elle est sur la case 0. Soit X_n le numéro de la case occupée par la puce après n sauts et Y_n le nombre de fois où la puce a sauté d'une case au cours des n premiers sauts
Donner la loi de Y_n, $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
Exprimer X_n en fonction de Y_n et n. En déduire $E(X_n)$ et $V(X_n)$ puis la loi de X_n.

Exercice 5
Un dé D comporte 20 faces marquées dont 7 faces sont numérotées 1, 8 faces sont numérotées 2, 5 faces sont numérotées 3.
Soit n un entier non nul. On lance n fois le dé D et on note $X_n^{(i)}$ le nombre de faces numérotées i au cours des n lancers.

1. Donner la loi de $X_n^{(1)}$, $X_n^{(2)}$, $X_n^{(3)}$ ainsi que leurs espérances et leurs variances respectives.
2. Les variables $X_n^{(1)}$ et $X_n^{(2)}$ sont-elles indépendantes ?
3. Lors des n lancers, pour chaque face numéro 1 (resp. 2, 3) obtenue on gagne 1 euro (resp. -2 euros, resp. a euros). Pour quelle valeur de a, le gain moyen du jeu est positif en moyenne ?

Exercice 6
Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec $c \geqslant 1$ boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).
On considère les variables aléatoires $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ définies par :
$X_i = 1$ si on obtient une boule blanche au $i^{ème}$ tirage et $X_i = 0$ sinon.
On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par : $Z_p = \sum\limits_{i=1}^{p} X_i$.

1. Donner la loi de X_1 ainsi que $E(X_1)$. Déterminer la loi de X_2 puis $E(X_2)$.
2. Que représente la variable Z_p ? Déterminer $Z_p(\Omega)$ ainsi que la loi de Z_2.
3. Soit $p \in \mathbb{N}^{\times}$, déterminer très soigneusement $P_{(Z_p=k)}(X_{p+1} = 1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
   En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que
   $$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}.$$
   En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$ (par récurrence en posant $(\mathcal{P}_p)$: $X_1, .., X_p$ suivent une loi de Bernouilli de paramètre $\dfrac{1}{2}$)

Exercice 7
On considère $N+1$ urnes notées $U_0, U_1, ..., U_N$ telles que, pour tout entier $k \in [\![0, N]\!]$, l'urne U_k soit composée de k boules rouges et de $N-k$ boules blanches. On choisit une urne au hasard dans laquelle on effectue alors n tirages successifs avec remise de la boule dans cette même urne. On note U la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et R la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n tirages.

1. Soit $k \in [\![0, N]\!]$ et $r \in [\![0, n]\!]$, calculer la probabilité conditionnelle $P_{(U=k)}(R = r)$.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, en déduire l'égalité :
   $$P(R = r) = \frac{\binom{n}{r}}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^r \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{n-r}.$$
   En déduire, pour $k \in [\![0, N]\!]$, la probabilité conditionnelle $P_{(R=r)}(U = k)$.