ECRICOME

CONCOURS D'ADMISSION

option économique et technologique

MATHÉMATIQUES

Année 1988

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

EXERCICE DE MATHEMATIQUES

Soit E un espace vectoriel rapporté à une base $B = (e_1, e_2, e_3)$; on considère l'endomorphisme f de E dont la matrice relativement à la base B est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Vérifier que A n'admet comme valeur propre que le réel $\lambda = 2$.

2. Déterminer l'ensemble des vecteurs propres associées à $\lambda = 2$.

3. On pose $\left\{\begin{array}{lllll} e'_1 = & & e_2 & + & e_3 \\ e'_2 = & e_1 & & + & e_3 \\ e'_1 = & e_1 & + & e_2 & \end{array}\right.$.

   Montrer que la matrice A' de f relativement à la nouvelle base $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est :

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. On écrit $A' = 2I + J$ avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer A'^n puis A^n.

5. Applications : déterminer en fonction de n les valeurs de x_n, y_n, z_n définis par

$$x_0 = y_0 = z_0 = 1 \qquad \left\{\begin{array}{l} x_{n+1} = 2x_n \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n - z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n + z_n \end{array}\right.$$

EXERCICE DE STATISTIQUES-PROBABILITES

Dans un hopital de la région parisienne, le nombre d'admis dans le service des urgences, au cours du samedi est une variable aléatoire X de distribution

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,22	0,33	0,25	0,13	0,05	0,02

La probabilité que la personne admise soit un homme est $0,3$. Soit Y la variable aléatoire "nombre d'hommes admis dans le service des urgences au cours de la nuit du samedi".

1. Quelle est la loi conditionnelle de Y pour $X = x_i$?

2. En déduire $P(Y = 4)$ à 10^{-4} près.

3. Si, un samedi donné, il n'y a que trois lits disponibles pour les hommes et deux pour les femmes, quelle est la probabilité de refuser un ou plusieurs patients hommes ou femmes ?

4. Déterminer la loi de Y en supposant que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1,5$.

Problème

Les parties A et B sont largement indépendantes.

Ce problème étudie, à partir de différentes hypothèses, la probabilité pour qu'une personne donnée soit retenue à la suite d'une offre d'emploi.

La notation ln désigne le logarithme népérien.

Première Partie -A

Une entreprise souhaite recruter un responsable pour son service commercial. Un certain nombre de personnes se présentent à la suite de cette offre. L'ordre des convocations pour l'entretien se fait au hasard. Pour diverses raisons, il a décidé que le premier candidat qui, au cours des ces entretiens, présenterait les qualités requises, serait immédiatement embauché.

Le nombre de personnes candidates à ce poste, convoquées et ayant les qualités exigées est une variable aléatoire X.

On considère que les ordres de passage de ces candidats "embauchables" devant la commission de recrutement sont équiprobables.

Enfin, dans tout le problème, on nomme A une personne ayant toutes les qualités pour être embauchée, et faisant partie des personnes convoquées.

1. On suppose dans cette question que X peut prendre comme valeur tout entier k vérifiant $1 \leqslant k \leqslant N$, N étant un entier fixé, toutes ces valeurs étant équiprobables.

   (a) Montrer que la probabilité α_N pour que A soit embauchée est donnée par

   $$\alpha_N = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}\right) \times \frac{1}{N}.$$

   (b) Utiliser, après l'avoir justifiée, l'inégalité

   $$\forall k \in \mathbb{N}^{\times}, \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

   pour obtenir un encadrement de α_N.
   En déduire la limite de α_N lorsque $N \to +\infty$.

2. On suppose dans cette question que X peut encore prendre comme valeur tout entier k vérifiant $1 \leqslant k \leqslant N$, sa loi étant définie par

   $$\forall k \in [\![1, N]\!], \quad P(X = k) = \frac{C}{k^r}$$

   où r est un réel supérieur ou égale à 1, et C une constante réelle.

   (a) A quelle condition doit satisfaire la constante C ?

   (b) Montrer que la probabilité β_N pour que A soit embauchée est donnée par :

   $$\beta_N = \frac{1 + \dfrac{1}{2^{r+1}} + \cdots + \dfrac{1}{N^{r+1}}}{1 + \dfrac{1}{2^r} + \cdots + \dfrac{1}{N^r}}.$$

   (c) On considère la suite (u_N), $N \in \mathbb{N}^{\times}$ définie par $u_N = \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{1}{k^r}$.
   En utilisant, comme en 1.b), l'inégalité pour $k \geqslant 1$,

   $$\frac{1}{(k+1)^r} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^r} \leqslant \frac{1}{k^r}$$

   discuter, selon la valeur de r, l'existence d'une limite pour u_N quant N tend vers $+\infty$.
   En déduire le comportement de β_N quand N tend vers $+\infty$.

3. On suppose dans cette question que le nombre $X - 1$ de personnes autres que A suit une loi de Poisson de paramètre λ.

(a) Exprimer la probabilité pour que A soit embauchée.

(b) On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^{\times}$ par

$$\varphi(\lambda) = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}.$$

i. Montrer que φ se prolonge en une fonction continue $\widetilde{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$.

ii. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^{\times}$ et calculer φ'.
Etudier la dérivabilité de $\widetilde{\varphi}'$ en 0.

iii. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = e^t - 1 - t$.
Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad h(t) \geqslant 0$. Résoudre l'équation $h(t) = 0$.

iv. Etudier le signe de φ', puis dresser le tableau de variations de $\widetilde{\varphi}$.
Construire la courbe représentative de $\widetilde{\varphi}$.

Deuxième partie -B

Cette seconde partie précise les résultats obtenus en A en étudiant notamment le comportement asymptotique de α_N quand N tend vers $+\infty$, et celui de β_N dans le cas $r = 2$.

1. (a) Soit (x_N) et (y_N) les suites définies par

$$\begin{aligned} x_N &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \ln N \text{ où } N \in \mathbb{N}^{\times} \\ y_N &= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \ln(N+1) \text{ où } N \in \mathbb{N}^{\times} \end{aligned}$$

Montrer que (x_N) et (y_N) sont monotones.
En déduire leur convergence vers une même limite L.

(b) Montrer que : $\forall N \in \mathbb{N}^{\times}, \quad 0 < L - y_N < \dfrac{1}{N}$.
En déduire une valeur approchée à 10^{-1} près.

(c) Montrer alors que la probabilité α_N peut s'écrire sous la forme

$$\alpha_N = \frac{\ln N}{N} + \frac{L}{N} + \frac{\varepsilon(N)}{N}$$

où $\varepsilon(N)$ vérifie $\lim\limits_{N \to +\infty} \varepsilon(N) = 0$.

2. Cette question étudie le comportement de β_N, dans le cas $r = 2$, lorsque N tend vers $+\infty$.

(a) Etude de $l_2 = \lim\limits_{N \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{N^2}\right)$.

i. On note $s_N = \sum\limits_{k=1}^{N} \dfrac{1}{k^2}$ et $r_{N+1} = l_2 - s_N = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$.
Etablir que $0 \leqslant r_{N+1} \leqslant \int\limits_{N}^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2}$.
Déterminer une valeur N_1 de l'entier N à partir de laquelle s_N est une valeur approchée de l_2 à 10^{-3} près.

ii. Etablir que : $\int\limits_{N+1}^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2} \leqslant r_{N+1} \leqslant \int\limits_{N}^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2}$.
En déduire que le réel s'_N défini par

$$s'_N = s_N + \frac{1}{2} \left(\int\limits_{N+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} + \int\limits_{N}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \right)$$

est une valeur approchée de l_2 telle que

$$\left|s'_n - l_2\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_N^{N+1} \frac{dt}{t^2}.$$

Déterminer une valeur N_2 de l'entier N à partir de laquelle s'_N est une valeur approchée de l_2 à 10^{-3} près.

iii. Calculer s'_{N_2}.
On précisera un algorithme simple permettant d'obtenir s'_N pour une valeur de N que cet algorithme laisserait au choix de l'utilisateur.

(b) Accélération de convergence :

i. On pose $u_k = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

En décomposant u_k sous la forme $\dfrac{a}{k} + \dfrac{b}{k+1}$, calculer $U_N = \sum\limits_{k=1}^{N} u_k$, puis $U = \lim\limits_{N\to+\infty} U_N$.

ii. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}^\times$, $\dfrac{1}{k^2} = u_k + u'_k$ puis $s_N = U_N + U'_N$ où $U'_N = \sum\limits_{k=1}^{N} u'_k$.
Quelle est la limite U' de U'_N, quand N tend vers $+\infty$?
Exprimer u'_k en fonction de k.
Après avoir étudier la monotonie sur $\mathbb{R}^\times$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2(t+1)}$, justifier :

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2(t+1)} \leqslant u'_k \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^2(t+1)}$$

puis

$$\int_{N+1}^{N+p+1} \frac{dt}{t^2(t+1)} \leqslant \sum_{k=N+1}^{N+p} u'_k \leqslant \int_N^{N+p} \frac{dt}{t^2(t+1)}$$

pour tout entier $p > 0$. En déduire comme en 2(a)ii. que

$$\widetilde{U}_N = U'_N + \frac{1}{2}\left(\int_{N+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^2(t+1)} + \int_N^{+\infty} \frac{dt}{t^2(t+1)}\right)$$

est une valeur approchée de U' telle que $\left|U' - \widetilde{U}_N\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\int_N^{N+1} \dfrac{dt}{t^2(t+1)}$.

iii. Montrer que $\left|U' - \widetilde{U}_N\right| \leqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{N^2(N+1)}$.
Déterminer une valeur de N_3 de l'entier N à partir de laquelle $\widetilde{U}_N$ est une valeur approchée de U' à 10^{-3} près.

(c) i. Déterminer a, b, c trois constantes réelles telles que

$$\forall t \in \mathbb{R}^\times, \quad \frac{1}{t^2(t+1)} = \frac{a}{t^2} + \frac{b}{t} + \frac{c}{t+1}.$$

En déduire l'expression de $\widetilde{U}_N$ en fonction de N.

ii. Calculer $\widetilde{U}_{N_3}$, puis la valeur approchée de l_2 qui s'en déduit.

iii. En admettant qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de

$$l_3 = \lim_{N\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{N^3}\right)$$

soit $l_3 \simeq 1,202$, préciser la limite β_N dans le cas $r = 2$.