ECRICOME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
EDHEC / icn nancy / esc reims / esc rouen

CONCOURS D'ADMISSION

option économique et technologique

MATHÉMATIQUES

Année 1989

Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

EXERCICE DE MATHEMATIQUES

On considère l'ensemble E des suites de nombres réels u_n (où $n \in \mathbb{N}$) vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 4u_{n+2} - 4u_{n+1} + u_n.$$

1. Montrer que pour tous λ et μ réels et toutes suites u et v de E, la suite $\lambda u + \mu v$ appartient à E.
2. Vérifier l'existence, et préciser la valeur, de trois réels distincts r non nuls tels que la suite de terme général $u_n = r^n$ soit élément de E. Ces trois réels seront notés r_1, r_2, r_3.
3. Soit u un élement de E. Montrer qu'il existe α, β, γ réels tels que la relation
$$u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + \gamma r_3^n$$
soit vérifiée pour $n = 0$, $n = 1$ et $n = 2$.
4. Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n + \gamma r_3^n$.

EXERCICE DE STATISTIQUES-PROBABILITES

Deux personnes A et B partent en vacances de façons indépendantes dans un pays E.
Leur séjour dans ce pays peut s'étaler sur n journées ($n > 3$) numérotées $1, 2, ..., n$.
Pour éventuellement s'y rencontrer, elles ont projeté de séjourner trois jours consécutifs (et trois jours seulement) dans un hotel H, choisi par elles.
On suppose que les jours d'arrivée possibles $1, 2, .., n-2$ de ces deux personnes dans cet hotel sont deux variables aléatoires uniformes et indépendantes.
Les arrivées ont lieu le matin et les départs le soir, deux jours plus tard.

1. (a) Quelle est la probabilité que A et B arrivent le même jour ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'elles arrivent avec un jour d'écart ?
   (c) Quelle est la probabilité qu'elles puissent se rencontrer dans l'hotel ?
2. Sachant que A et B se sont rencontrées, quelle est la probabilité qu'elles ne puissent passer qu'une journée ensemble ?

PROBLEME

Les bons de commande que renvoient les clients d'une entreprise de vente par correspondance portent des numéros tous différents qui permettent de les archiver.
Le service chargé de les classer, les reçoit par paquets de n (n fixe $\in \mathbb{N}^{\times}$), auquels s'ajoute éventuellement un paquet incomplet contenant donc un nombre de bons inférieur ou égal à $n-1$.
Sur une période donnée, le service d'archivage reçoit toujours p paquets de n fiches, p étant un entier naturel non nul fixé, supérieur ou égal à 2 et un complément éventuel. Le nombre de fiches reçues est donc $pn + X$ où X est une variable aléatoire prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{0, .., n-1\}$.

Première partie -A

On suppose ici que X suit la loi uniforme sur $\{1, .., n-1\}$.

1. (a) On note F_1 l'évènement :
   "la première fiche extraite au hasard de l'ensemble de toutes les fiches a comme numéro le plus petit des numéros".
   Décomposer l'évènement F_1 à l'aide du système complet d'évènements $(X = 0), (X = 1), ..., (X = n-1)$.
   En déduire que la probabilité $\alpha_{n,1}$ de l'évènement F_1 est : $\alpha_{n,1} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{pk+n}$.

(b) Soit $i \in \mathbb{N}^\times$, $i \leqslant np$.
On note F_i l'évènement :
"les i premières fiches successivement extraites de l'ensemble sans remise ont, et dans le bon ordre, les i numéros les plus faibles".
Montrer que la probabilité $\alpha_{n,i}$ de l'évènement F_i est : $\alpha_{n,i} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{A_{pn}^i + k}$.
Rappel : on note $A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

2. **Etude de $\alpha_{n,2}$.**

(a) Vérifier l'existence de deux réels a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}^\times \backslash \{1\}$

$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1}.$$

(b) En déduire $\alpha_{n,2} = \dfrac{1}{(pn-1)(pn+n-1)}$.

3. **Etude de $\alpha_{n,1}$.**

(a) Montrer, en utilisant l'approximation d'une intégrale par la méthode des rectangles, que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{pn+k} = \ln\left(\frac{p+1}{p}\right)$$

et en déduire que :

$$\alpha_{n,1} = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{p+1}{p}\right) + \frac{1}{n}\varepsilon(n) \text{ où } \lim_{n\to+\infty}\varepsilon(n) = 0.$$

(b) En utilisant la monotonie de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{p+x}$, établir plus précisément que :

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} \frac{dx}{p+x} \leqslant \frac{1}{n} \times \frac{1}{p+(k/n)} \leqslant \int_{(k-1)/n}^{k/n} \frac{dx}{p+x}$$

puis que

$$\frac{1}{n}\ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leqslant \alpha_{n,1} \leqslant \frac{1}{n}\ln\left(\frac{p+1-(1/n)}{p-(1/n)}\right).$$

(c) Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(\frac{p+1-x}{p-x}\right)$$

où p désigne un entier naturel non nul.

(d) On suppose $p \geqslant 2$.
Vérifier que, pour tout $x \in [0,1]$, $\quad |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{p(p-1)}$.
En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$, $\quad \left|f(\dfrac{1}{n}) - f(0)\right| \leqslant \dfrac{1}{np(p-1)}$
puis que

$$0 \leqslant \alpha_{n,1} - \frac{1}{n}\ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leqslant \frac{1}{n^2 p(p-1)}.$$

Pour quelles valeurs de n peut-on alors considérer que $\dfrac{1}{n}\ln\left(\dfrac{p+1}{p}\right)$ est une valeur approchée de $\alpha_{n,1}$ avec une valeur inférieure ou égale à 10^{-2} ?

Deuxième partie -B

I) Dans cette partie, $\alpha_{n,1}$ représente toujours la probabilité que la première fiche extraite porte le premier numéro, mais en faisant l'hypothèse suivante :
le nombre de fiches reçues est $pn + X$ où X est une variable aléatoire prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2, ..., n-1\}$ selon la loi précédente

$$P(X = k) = C_n e^{-k/n} \qquad C_n \text{ désignant une constante réelle ne dépendant que de } n.$$

1. Montrer que $C_n = \dfrac{e}{e-1}(1 - e^{-1//n})$.

2. Déterminer la valeur de $\alpha_{n,1}$ et montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_{n,1} = \dfrac{e}{e-1}\int_0^1 \dfrac{e^{-x}}{p+x}dx$.

II) On se propose de déterminer selon différentes méthodes des valeurs approchées de :

$$I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+x}dx.$$

1. (a) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$,
$$1 - x \leqslant e^{-x} \leqslant 1 - x + \frac{x^2}{2}.$$
   (b) En déduire que pour tout $x \in [0, 1]$,
$$-1 + \frac{2}{1+x} \leqslant \frac{e^{-x}}{1+x} \leqslant \frac{x}{2} - \frac{3}{2} + \frac{5/2}{1+x}.$$
   (c) Préciser alors un encadrement de I et en conclure qu'une valeur approchée de I est
$$I_1 = \frac{9}{4}\ln 2 - \frac{9}{8} \qquad \text{avec} \qquad |I - I_1| \leqslant 0,05.$$

2. (a) Etudier et représenter la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+x}$.
   (b) Jusitifier les inégalités
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(\frac{k}{n}) \leqslant I \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n}).$$
   En déduire qu'une valeur approchée de I est :
$$I_2(n) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} g(\frac{k}{n}) + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(\frac{k}{n})\right]$$
   avec $|I - I_2(n)| \leqslant \dfrac{2e-1}{4e}\dfrac{1}{n}$.
   Quelle valeur conviendrait-il de donner à n pour obtenir $I_2(n)$ comme valeur approchée à 10^{-2} près ?

3. (a) Constater que :
$$I_2(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n}\left[\frac{g(\frac{k}{n}) + g(\frac{k+1}{n})}{2}\right]$$
   puis que
$$I_2(n) = \sum_{k=0}^{n} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left[g(\frac{k}{n}) + \left(\frac{g(\frac{k+1}{n}) - g(\frac{k}{n})}{\frac{1}{n}}\right)(x - \frac{k}{n})\right] dx$$

et

$$I - I_2(n) = \sum_{k=0}^{n} \int_{k/n}^{(k+1)/n} \left[g(x) - g(\frac{k}{n}) - \left(\frac{g(\frac{k+1}{n}) - g(\frac{k}{n})}{\frac{1}{n}} \right) (x - \frac{k}{n}) \right] dx.$$

(b) Soit $[a, b]$ un segment inclus dans $[0, 1]$, avec $a < b$.
On pose, pour $x \in [a, b]$,

$$\Phi(x) = g(x) - g(a) - \left[\frac{g(b) - g(a)}{b - a} \right] (x - a) \qquad \text{et} \qquad \alpha = \int_a^b \Phi(x) dx.$$

Montrer, en utilisant par exemple une intégration par parties, que pour $t \in [a, b]$:

$$g(t) - g(a) = (t - a)g'(a) + \int_a^t (t - u)g"(u)du.$$

En déduire $\forall x \in [a, b]$, $\quad \Phi(x) = \int_a^x (x - u)g"(u)du - \frac{x - a}{b - a} \int_a^b (b - u)g"(u)du.$

(c) Etudier le signe de $g"$ sur $[0, 1]$ et établir que

$$|\Phi(x)| \leqslant 2(x - a) \left[g'(b) - g'(a) \right]$$

puis que

$$|\alpha| \leqslant (b - a)^2 \left[g'(b) - g'(a) \right].$$

(d) Déduire du résultat précédent que :

$$|I - I_2(n)| \leqslant \frac{1}{n^2} \left[g'(1) - g'(0) \right] \leqslant \frac{1,75}{n^2}.$$

Quelle valeur n_0 convient-il de donner à n pour obtenir $I_2(n)$ comme valeur approchée de I à 10^{-2} près ?
Calculer $I_2(n_0)$.