ECRICOME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option technologique

MATHÉMATIQUES I

Année 1998

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 4 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations.

Tournez la page
S.V.P

Exercice1

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $x \longmapsto g(x) = xe^x - e^x + 1$.
   Montrer que $g'(x)$ a le signe de x et en déduire le signe de $g(x)$.

2. On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si} x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

   (a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$. Calculer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 et justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

   (b) Soit $x \neq 0$. Calculer la dérivée de f et montrer que $f'(x)$ est positif.

   (c) Calculer les limites de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

   (d) Faire le tableau de variations de f.

3. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par récurrence par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = f(u_n) \quad (n \geqslant 0)$$

   (a) Vérifier que $f(2) - f(-2) = 2$.
   Montrer que, pour tout entier n strictement positif, $u_{n+1} - u_n$ a le signe de $u_n - u_{n-1}$.
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

   (b) Déterminer le signe de u_n.

   (c) Montrer alors que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0.

Exercice 2

L'élément F d'une machine est source de pannes fréquentes. Lorsque cet élément est défaillant, il est aussitôt remplacé.
Le coût du dépannage (pièce et main d'oeuvre) s'élève à x francs et la perte de production due à cette panne à y francs.
On suppose qu'il ne peut se produire plus d'une panne par jour.
On note p_n la probabilité de bon fonctionnement le $n^{\text{ième}}$ jour ($n = 1$ correspond au jour de la mise en service de la machine).
Si la machine fonctionne correctement le jour j, la probabilité qu'elle fonctionne aussi correctement le jour $j + 1$ est $0,6$.
Si l'élément F est changé le jour j, la probabilité de bon fonctionnement le jour $j + 1$ est $0,9$.

1. Exprimer la probabilité p_{n+1} de bon fonctionnement le $n + l^{\text{ième}}$ jour en fonction de la probabilité p_n de bon fonctionnement le $n + l^{\text{ième}}$ jour.
   En déduire p_n en fonction de p_1 et n.

2. Prouver que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \dfrac{9}{13}$.

3. On admet que la convergence de cette suite est "rapide" et on considère désormais que la probabilité de bon fonctionnement de la machine est $\dfrac{9}{13}$ dans l'hypothèse où l'élément F n'est changé qu'en cas de panne.
   on appelle C_1 la variable aléatoire égale au coût d'intervention quotidien.

   (a) Donner la loi de C_1 en fonction de x et y.

   (b) Calculer l'espérance de C_1.

4. On envisage un entretien préventif de cette machine consistant à remplacer chaque jour, avant la mise en service de la machine, l'élément F.
   Le coût de cet entretien reste égal à x francs.
   Dans cette hypothèse, on interviendra donc chaque jour, une ou deux fois, selon qu'il y a panne ou non.
   La probabilité de bon fonctionnement de la machine pendant la journée reste évidemment égale à $0,9$ puisque l'élément F est neuf !
   On appelle C_2 la variable aléatoire égale au coût d'intervention quotidien.
   (a) Donner la loi de C_2 en fonction de x et y.
   (b) Calculer l'espérance de C_2.

5. Vous devez aider à choisir entres les deux options :
   i) attendre la panne ou **ii)** procéder à un entretien préventif systématique.
   Que conseillez-vous ?
   Représentez graphiquement l'ensemble des couples (x, y) qui vous conduisent à conseiller l'option **i)**.

Problème

Les parties **A, B** et **C** sont totalement indépendantes entre elles et peuvent être traitées dans un ordre indifférent.

Partie A

Soit n un entier positif ou nul. On note I_n l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\, dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.
2. Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n.
3. En déduire que $I_n = n!$.

Partie B

Calculer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \\ 24 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ en utilisant la méthode du pivot de Gauss.

Partie C

1. Tracer dans un même repère orthonormé les parties des courbes C_1, C_2 et C_3 situées dans le quart de plan $m \geqslant 0$ $v \geqslant 0$, d'équations respectives :

$$\begin{array}{ll} (C_1) & v = -m^2 + 4m - 2 \\ (C_2) & v = -m^2 + 5m - 3 \\ (C_3) & v = -m^2 + 6m - 6 \end{array}$$

   On prendra m pour abscisse et v pour ordonnée. L'unité sera prise égale à 3 cm. On donne les valeurs approchées suivantes : $\sqrt{2} \cong 1,4$ $\quad \sqrt{3} \cong 1,7$ $\quad \sqrt{13} \cong 3,6$.

2. Hachurer sur le graphique précédent la région qui correspond aux solutions du système d'inéquations :

$$\begin{cases} m \geqslant 0 \\ v \geqslant 0 \\ v \geqslant -m^2 + 4m - 2 \\ v \leqslant -m^2 + 5m - 3 \\ v \geqslant -m^2 + 6m - 6 \end{cases}$$

3. Exprimer l'aire de cette région à l'aide d'intégrales. Donner sa valeur en cm^2.

Partie D

m et v sont deux réels positifs.
Dans cette partie, on cherche une condition sur m et v pour qu'il existe un triplet de réels positifs a, b et c tels que :

i) $f(t) = \left(at^2 + bt + c\right) e^{-t}$ soit la densité d'une variable aléatoire X prenant des valeurs positives.

ii) $E(x) = m$.

iii) $V(X) = m$.

1. Montrer que $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est l'unique solution du système linéaire $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \\ m^2 + v \end{pmatrix}$ où A est la matrice de la **partie B**.
2. Expliciter a, b et c en fonction de m et v.
3. Montrer que les couples (m, v) qui répondent à la question sont ceux déterminés à la question **C 2**.
4. Quel est parmi ces couples, celui qui maximise m? Déterminer alors v, a, b et c.