ECRICOME

Banque d'épreuves communes
aux concours des Ecoles
esc bordeaux / esc marseille / icn nancy / esc reims / esc rouen / esc toulouse

CONCOURS D'ADMISSION

option technologique

MATHÉMATIQUES

Année 2001

Aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Aucun document n'est autorisé.

L'énoncé comporte 3 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé, et à donner des démonstrations complètes (mais brèves) de leurs affirmations. Tournez la page S.V.P

Tournez la page
S.V.P

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$

1. (a) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$
   (b) Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $-\infty$ dont on donnera une équation.
2. Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations.
3. Montrer que pour tout entier *n supérieur ou égal à 2* 1' équation $f(x) = n$ admet deux solutions de signes contraires. La solution positive sera notée a_n.
4. Tracer la courbe représentative de f. Faire apparaître a_2 et a_3 sur le graphique. On prendra 1cm pour unité sur les axes et $e \simeq 2,7$
5. Etudier les variations de la suite $(a_n)_{n>1}$
6. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a l'inégalité: $a_n \geqslant \ln n$.
   En déduire la limite de la suite(a_n) quand n tend vers l'infini.

Exercice 2

On donne les matrices suivantes: $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. CalculerA^2 et montrer qu'il existe deux réels a et b que l'on déterminera tels que $A^2 = aA + bI_3$.
2. En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3.
3. Soient (u_n) et (v_n) les deux suites définies par les relations de récurrence:

$$u_0 = 0; \quad v_0 = 1; \quad u_{n+1} = -u_n + v_n; \quad v_{n+1} = 2u_n$$

   Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 0, \quad A^n = u_n A + v_n I_3$.

4. (a) On pose $x_n = u_n + v_n$. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $x_n = 1$.
   (b) Pour tout entier $n \geqslant 0$, on pose $y_n = 2u_n - v_n$.
   Montrer que la suite (y_n) est géométrique et préciser sa raison. Exprimer alors y_n en fonction de n.
   (c) En déduire les expressions de u_n et v_n en fonction de n.
5. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$$A^n = \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(-2)^n\right].A + \left[\frac{2}{3} + \frac{1}{3}(-2)^n\right].I_3$$

   Cette formule est-elle encore valable pour $n = -1$?

Exercice 3

Une usine dispose de deux chaînes de production d'ampoules électriques. On suppose que la probabilité qu'une ampoule soit défectueuse à la sortie de l'une ou l'autre chaîne est de 1%.
On suppose que la chaîne A fabrique n ampoules par jour et que la chaîne B en fabrique m par jour. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules défectueuses fabriquées par la chaîne A un certain jour, et par Y la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules défectueuses fabriquées par la chaîne B ce même jour. On suppose que les deux variables X et Y sont indépendantes.

1. Reconnaître les lois de X et Y en justifiant la réponse.

2. On teste une par une les $m+n$ ampoules fabriquées un certain jour par les deux chaînes de fabrication et on appelle S la variable aléatoire égale au nombre d'ampoules qui se sont révélées défectueuses.

   (a) Reconnaître la loi de la variable aléatoire S.

   (b) Comment exprimer S en fonction de X et Y ?

3. On suppose que $n = 4000$ et $m = 6000$.

   (a) Justifier que l'on peut approcher la loi de S par une loi normale dont on précisera les paramètres.

   (b) En utilisant cette approximation et en ne tenant pas compte de la correction de continuité, calculer la probabilité que le nombre d'ampoules défectueuses fabriquées ce jour soit compris au sens large entre 95 et 105.

4. Les ampoules en bon état sont vendues dans le commerce et on estime que la durée de vie en heures de chaque ampoule est une variable aléatoire réelle qui suit une loi exponentielle de paramètre $0,001$. Une personne achète deux ampoules qu'elle met en service au même moment. On suppose que les durées de vie de ces deux ampoules sont indépendantes.

   (a) Calculer la probabilité que les deux ampoules fonctionnent au moins 500 heures.

   (b) Calculer la probabilité pour qu'une seule ampoule fonctionne encore après 1000 heures.

Valeurs numériques approchées

$e^{-1} \simeq 0,368, \quad e^{-1} - e^{-2} \simeq 0,233, \quad F(\frac{5}{3\sqrt{11}}) \simeq 0,692,$

F désignant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Fin de l'épreuve