

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD

Concours d'admission sur classes préparatoires

MATHEMATIQUES

Option économique

Année 1984

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

I) Test sanguin

On estime à 20 % le nombre de personnes atteintes d'une maladie A.

Pour diagnostiquer cette maladie, on prélève sur les individus du sang. On fait ensuite une analyse de ce sang pour dépister la maladie.

Cette analyse coûte très cher, c'est pourquoi on propose d'opérer de la façon suivante :

On forme des groupes de x personnes et on prélève une partie du sang de chacun des personnes que l'on met dans une même éprouvette et on fait l'analyse. Deux cas peuvent se produire :

- a) L'analyse ne révèle pas de germe de la maladie et donc tous les membres du groupe sont en bonne santé.
- b) L'analyse révèle une présence de germes et dans ce cas, on refait une analyse pour chacune des personnes du groupe.

Le but du problème est de déterminer la taille x^0 du groupe qui permet en moyenne (espérance) d'aboutir au nombre minimum d'analyses.

1. Pour chaque valeur de x , déterminer le nombre moyen (espérance) d'analyses par personne. On notera $f(x)$ ce nombre.
2. Etudier pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 2, la fonction f . En particulier, on étudiera le signe de la dérivée seconde.
3. En ne perdant pas de vue que la valeur x^0 est un nombre entier, trouver cette valeur en vous servant de la question précédente. On justifiera la réponse.

4. Un hôpital décide d'effectuer par jour l'analyse sur n groupes de x^0 individus. On note X le nombre d'analyses réalisés par l'hôpital pendant une journée.
Montrer qu'il existe deux nombres a et b tels que la loi de la variable $Y = aX + b$ peut-être approximée par une loi binômiale dont on précisera les paramètres.
5. Déterminer la probabilité pour que la variable X soit supérieure au nombre d'analyses que l'on ferait si on opérât de façon classique (une analyse par individu).
On calculera cette probabilité pour $n = 4$ et pour $n = 50$.
On voudrais généraliser cette méthode à n'importe quel type de maladie pour laquelle on connaît la proportion de personnes atteintes.
On ne suppose donc plus que cette proportion égale à 20 % mais à un certain nombre p compris entre 0 et 1.
6. Déterminer la plus petite valeur \tilde{p} telle que pour toute valeur p supérieure à \tilde{p} , le nombre optimal $x^0(p)$ associé à p soit 1 (c'est-à-dire une analyse par individu).
7. On définit la fonction g suivante :

$$g : \begin{array}{l}]0, 1[\rightarrow \mathbb{N} \\ p \mapsto x^0(p) \end{array}$$

- Montrer que g est une fonction en escalier décroissante.
- Montrer que $\lim_{p \rightarrow 0} g(p) = +\infty$
- Montrer que $\lim_{p \rightarrow 1} g(p) = 1$

II) Longueur d'une piste

On vous demande de concevoir une piste de ski. On vous impose au départ une forme approximative pour qu'elle comporte un certain nombre de difficultés. Enfin, on vous précise quelle longueur doit faire la piste.

Vous avez donc à résoudre le problème suivant :

On vous donne une fonction f définie sur $[a, b]$ et on désire calculer la longueur de l'arc de la courbe formé par le graphe de cette fonction entre les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

On suppose f continue et dérivable sur l'intervalle $[a, b]$ et f' continue sur $[a, b]$.

1. Soit (a_0, a_1, \dots, a_n) une subdivision de l'intervalle $[a, b]$ (c'est-à-dire $a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$) en n parties égales..

On considère les points M_i ($i \in \{0, 1, \dots, n\}$) de coordonnées $x = a_i$, $y = f(a_i)$.

On définit $d_n = \sum_{i=1}^n d(M_i, M_{i-1})$ (d est la distance euclidienne, c'est-à-dire : $M(x, y)$, $M'(x', y')$)

$$d(M, M') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$$

Montrez qu'il existe n points t_1, \dots, t_n tels que $a_{i-1} < t_i < a_i$ $i \in \{1, \dots, n\}$ avec

$$d_n = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + (f'(t_i))^2}.$$

2. Montrer que la fonction $g = \sqrt{1 + (f')^2}$ est continue et intégrable sur $[a, b]$.

3. Montrer que $d = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

d est donc la longueur de l'arc de courbe formé par le graphe de la fonction f entre les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Applications

4. Vérifier dans le cas où f est une fonction affine (c'est-à-dire $x \mapsto cx + d$) que le nombre défini ci-dessus est égal à la longueur du segment de droite délimité par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, calculée par le théorème de Pythagore.
5. Retrouver, en choisissant convenablement la fonction f et les deux nombres réels a et b , le périmètre d'un cercle en vous servant de la formule établie au 3).
6. Calculer le nombre d en prenant la fonction f définie sur $[1, 2]$ par $x \mapsto f(x) = \sqrt{x^3}$.
Vous pourriez maintenant à l'aide de la formule établie au 3) construire votre piste de ski en associant à chaque portion de votre piste, une fonction dont le graphe reproduirait la forme de cette portion.

III) Propriétés classiques sur les applications linéaires

On considère sur l'espace \mathbb{R}^n une forme linéaire f (c'est-à-dire : f est une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}).

1. Montrer qu'il existe un n -uplet (t_1, t_2, \dots, t_n) tel que pour tout $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ élément de \mathbb{R}^n ,

$$f(V) = t_1 v_1 + \dots + t_n v_n.$$

Pour tout élément $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de \mathbb{R}^n on considère le nombre $N(V)$ défini par la somme des carrés des coordonnées v_i de l'élément V . Puis on définit l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{|f(V)|^2}{N(V)} \quad / \quad V \in \mathbb{R}^n, \quad V \neq \vec{0} \right\}$$

Enfin, on définit l'ensemble

$$B = \{|f(V)| \quad / \quad V \in \mathbb{R}^n, \quad N(V) = 1\}$$

On se propose de démontrer que A est un ensemble majoré (c'est-à-dire qu'il existe un nombre M tel que pour tout x élément de A , $x \leq M$).

2. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes
 - (a) A est un ensemble majoré.
 - (b) B est un ensemble majoré.
3. Montrer que l'ensemble B est majoré.
4. Refaire les deux questions précédentes en prenant pour $N(V)$ la maximum du carré des coordonnées de l'élément V .

Insérer une table de loi normale