

ECOLE DE HAUTES ETUDES COMMERCIALES DU NORD  
Concours d'admission sur classes préparatoires

---

**MATHEMATIQUES**

Option économique

**Année 2005**

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

**L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.**

**Exercice 1**

On note  $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , et  $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , et on rappelle que la famille  $(J_1, J_2, J_3, J_4)$  est une base de  $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ .

Soit  $f$  l'application qui, à toute matrice  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  de  $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ , associe  $f(M) = M + (a+b)I$  où  $I$  désigne la matrice  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ .
2. (a) Exprimer  $f(J_1)$ ,  $f(J_2)$ ,  $f(J_3)$ , et  $f(J_4)$  comme combinaisons linéaires de  $J_1, J_2, J_3$  et  $J_4$ .  
(b) Vérifier que la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $(J_1, J_2, J_3, J_4)$  est  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$   
(c) Justifier que  $f$  est diagonalisable.
3. (a) Montrer que  $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$  est une base de  $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$   
(b) Écrire la matrice  $D$  de  $f$  dans cette base.  
(c) En déduire l'existence d'une matrice  $P$  inversible telle que  $A = PDP^{-1}$
4. (a) Déterminer la matrice  $P^{-1}$ .  
(b) Montrer que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $A^n = PD^nP^{-1}$   
(c) En déduire explicitement la matrice  $A^n$ .

## Exercice 2

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = x e^{x(y^2+1)}$

1. Justifier que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
2. (a) Déterminer les dérivées partielles premières de  $f$   
(b) En déduire que le seul point en lequel  $f$  est susceptible de présenter un extremum local est  $A = (-1, 0)$ .
3. (a) Déterminer les dérivées partielles secondes de  $f$ .  
(b) Montrer qu'effectivement,  $f$  présente un extremum local en  $A$ . En préciser la nature et la valeur.
4. (a) Montrer que:  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \geq x e^x$ .  
(b) En étudiant la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x e^x$ , conclure que l'extremum trouvé à la question 2b) est un extremum global de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

## Exercice 3

Dans cet exercice,  $a$  désigne un réel strictement positif.

1. On considère la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(t) = \begin{cases} a(1-t)^{a-1} & \text{si } t \in [0, 1[ \\ 0 & \text{si } t \notin [0, 1[ \end{cases}$ 
  - (a) Pour tout  $x$  de  $[0, 1[$ , calculer  $\int_0^x f(t) dt$
  - (b) En déduire que  $\int_0^x f(t) dt$  est une intégrale convergente et donner sa valeur.
  - (c) Montrer que  $f$  peut être considérée comme une fonction densité de probabilité.  
On considère maintenant une variable aléatoire  $X$  admettant  $f$  comme densité et on note  $F$  sa fonction de répartition.
2. Expliciter  $F(x)$  pour tout réel  $x$ .  
On se propose de déterminer l'espérance  $E(X)$  et la variance  $V(X)$  de la variable aléatoire  $X$ . Pour ce faire, on pose  $Y = -\ln(1-X)$  et on admet que  $Y$  est une variable aléatoire à densité. On note alors  $G$  sa fonction de répartition.
3. (a) Pour tout réel  $x$  positif, exprimer  $G(x)$  en fonction de  $x$ .  
(b) En déduire que  $Y$  suit la loi exponentielle de paramètre  $a$ .
4. (a) Pour tout réel  $\lambda > 0$ , donner la valeur de  $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$ .  
(b) En déduire que la variable aléatoire  $e^{-Y}$  possède une espérance et donner sa valeur en fonction de  $a$ .  
(c) Exprimer  $X$  en fonction de  $Y$ , puis en déduire que  $X$  possède une espérance dont on donnera l'expression en fonction de  $a$ .  
(d) Montrer que la variable aléatoire  $e^{-2Y}$  possède une espérance et que  $E(e^{-2Y}) = \frac{a}{a+2}$   
En déduire la variance de  $e^{-Y}$  puis la variance de  $X$ .

## Problème

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières d'un axe d'origine  $O$ .

Au départ, le mobile est à l'origine.

Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse  $k$  à l'instant  $n$ , alors, à l'instant  $(n + 1)$  il sera sur le point d'abscisse  $(k + 1)$  avec la probabilité  $p$  ( $0 < p < 1$ ) ou sur le point d'abscisse  $0$  avec la probabilité  $1 - p$ .

Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on note  $X_n$  l'abscisse de ce point à l'instant  $n$  et l'on a donc  $X_0 = 0$ .

On admet que, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$   $X_n$  est définie sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

Par ailleurs, on note  $T$  l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ).

Par exemple, si les abscisses successives du mobile après son départ sont  $0, 0, 1, 2, 0, 0, 1$ , alors on a  $T = 1$ . Si les abscisses successives sont:  $1, 2, 3, 0, 0, 1$ , alors on a  $T = 4$ .

On admet que  $T$  est une variable aléatoire définie sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

1. (a) Pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^\times$ , exprimer l'événement  $(T = k)$  en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables  $X_i$ .  
(b) Donner la loi de  $X_1$ .  
(c) En déduire  $P(T = k)$  pour tout  $k$  de  $\mathbb{N}^\times$ , puis reconnaître la loi de  $T$ .
2. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $X_n(\Omega) = \llbracket 0, n \rrbracket$   
(b) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^\times$ , utiliser le système complet d'événements  $(X_{n-1} = k)_{0 \leq k \leq n-1}$  pour montrer que :  
 $P(X_n = 0) = 1 - p$
3. (a) Établir que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n+1\}, \quad P(X_{n+1} = k) = pP(X_n = k-1)$   
(b) En déduire que :  $\forall n \in \mathbb{N}^\times, \quad \forall k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}, \quad P(X_n = k) = p^k(1-p)$ .  
En déduire également la valeur de  $P(X_n = n)$ . Donner une explication probabiliste de ce dernier résultat.  
(c) Vérifier que  $\sum_{k=0}^n P(X_n = k) = 1$ .

4. Dans cette question et dans cette question seulement, on prend  $p = \frac{1}{3}$ .

On rappelle que `random(3)` renvoie au hasard un entier de  $\{0, 1, 2\}$ .

Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire étudiée et affiche la valeur prise par  $X_n$  pour une valeur de  $n$  entrée par l'utilisateur.

```
Program edhec2005 ;
```

```
Var k, n, u, X : integer ;
```

```
begin
```

```
  Readln(n) ;
```

```
  Randomize ;
```

```
  X:=0;
```

```
  For k:=1 to n do
```

```
    begin
```

```
      u := random(3) ;
```

```
      if (u = 2) then X :=.....;
```

```
        else X :=.....;
```

```
      end ;
```

```
    Writeln (X) ;
```

```
end.
```

5. (a) Montrer que :  $\forall n \geq 2, \sum_{k=1}^{n-1} kp^{k-1} = \frac{(n-1)p^n - np^{n-1} + 1}{(1-p)^2}$
- (b) En déduire que  $E(X) = \frac{p(1-p^n)}{1-p}$ .
6. (a) Montrer, en utilisant la question 3a), que :  $\forall n \in \mathbb{N}, E(X_{n+}^2) = p(E(X_n^2) + 2E(X_n) + 1)$ .
- (b) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $u_n = E(X_n^2) + (2n-1)\frac{p^{n+1}}{1-p}$   
 Montrer que  $u_{n+1} = pu_n + \frac{p(1+p)}{1-p}$
- (c) En déduire l'expression de  $u_n$ , puis celle de  $E(X_n^2)$  en fonction de  $p$  et  $n$ .
- (d) Montrer enfin que:  $V(X_n) = \frac{p}{(1-p)^2} (1 - (2n+1)p^n(1-p) - p^{2n+1})$