Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1981

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option générale)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Nota : les trois parties sont indépendantes.

Partie I

On considère la fonction numérique de variable réelle f définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{e}(1+t)^{\frac{1}{t}+\frac{1}{2}} & \text{si} \quad t\neq 0\\ 1 & \text{si} \quad t=0\end{cases}$$

1. (a) Etablir le développement limité de $\ln(1+t)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.
   En déduire que la fonction f possède un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0.

   (b) Montrer que f est continue et dérivable en 0.

2. Soit φ la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par

$$\varphi(t)=\frac{1}{2}(1+t-\frac{1}{1+t})-\ln(1+t).$$

   (a) Etablir, pour $t\neq 0$, l'égalité :

$$f'(t)=\frac{1}{t^2}.\varphi(t).f(t).$$

   (b) En déduire que f' est continue sur $]-1,+\infty[$.

   (c) Etudier le signe de $\varphi(t)$ pour $t\in]-1,\infty[$.

   (d) En déduire :

$$\forall t\in]-1,+\infty[\quad f(t)\geqslant 1.$$

3. Pour $x\in\mathbb{R}_+$, on considère la série de terme général $u_n(x)=\dfrac{(nx)^n.n^{1/2}}{n!}$ pour $n\geqslant 1$.

   (a) Vérifier, pour $x>0$, l'égalité $\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=e.x.f(\dfrac{1}{n})$.

   (b) Etudier la convergence de cette série suivant les valeurs de $x\in\mathbb{R}_+$.

   (c) En déduire les limites des deux suites $v_n=(\dfrac{n}{3})^n\cdot\dfrac{n^{1/2}}{n!}$ et $w_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(\dfrac{k}{2})^k.\dfrac{k^{1/2}}{k!}$.

(d) Etablir successivement les inégalités suivantes pour $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\ln(1+t) \leqslant t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}$$

$$\ln(f(t)) \leqslant \frac{t^2}{12} + \frac{t^3}{6}$$

(e) En utilisant **3.a.**, établir la majoration :

$$\forall n \geqslant 2 \qquad \ln(u_n(\frac{1}{e})) \leqslant -1 + \sum_{k=1}^{n-1} (\frac{1}{12}.\frac{1}{k^2} + \frac{1}{6}.\frac{1}{k^3})$$

et en déduire que la suite $(u_n(\frac{1}{e}))_{n\geqslant 1}$ est majorée.

(f) En déduire la limite de la suite $(\frac{n^n.\, e^{-n}}{n!})_{n\geqslant 1}$.

Partie II

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme de $\mathbb{C}$:

$$Q_n(X) = \frac{1}{2i}\left[(X+i)^{n+1} - (X-i)^{n+1}\right]$$

1. Déterminer le degré de Q_n.
2. Pour tout entier naturel r, montrer que

$$Q_{2r}(X) = \sum_{p=0}^{r} (-1)^p C_{2r+1}^{2p+1} X^{2r-2p} \tag{1}$$

3. (a) Déterminer les racines de Q_n. Montrer que ces racines sont réelles.

   (b) En déduire la décomposition de Q_n en produit de polynômes du premier degré.
4. Pour tout entier naturel r, montrer que

$$Q_{2r}(X) = (2r+1)\prod_{k=1}^{r}(X^2 - \mathrm{cotan}^2\,\frac{k\pi}{2r+1}). \tag{2}$$

5. En utilisant (1) et (2), établir l'égalité

$$\sum_{k=1}^{r} \mathrm{cotan}^2\,\frac{k\pi}{2r+1} = \frac{r(2r-1)}{3}$$

(On calculera de deux façons le coefficient de X^{2r-2} dans Q_{2r} .)
En deduire l'égalité

$$\sum_{k=1}^{r} \frac{1}{\sin^2 \dfrac{k\pi}{2r+1}} = \frac{2r(r+1)}{3}$$

(On calculera de deux façons le coefficient de X^{2r-2} dans Q_{2r}).

6. (a) Pour tout x de $]0, \frac{\pi}{2}[$, établir les inégalités:

$$\text{cotan}^2 x < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}$$

(b) En déduire un encadrement de $\sum\limits_{k=1}^{r} \frac{1}{(\frac{k\pi}{2r+1})^2}$.

(c) Montrer que la série de terme général $\frac{1}{k^2}$ est convergente et calculer $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

Partie III

Pour tout entier naturel n et tout réel x strictement supérieur à -1, on pose

$$F_n(x) = \int_0^x \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} dt$$

1. Montrer que F_n est définie et continue sur $]-1, +\infty[$. Etudier son sens de variation. Montrer que F_n admet des limites en -1 et $+\infty$ et calculer ces limites.

2. Soit x fixé, avec $x > 0$. Montrer que : $\forall t \in [0, x] \quad \frac{t^n}{(1+t)^{n+1}} \leqslant \frac{x^n}{(1+x)^n}$.
on pourra comparer d'abord $\frac{t}{1+t}$ et $\frac{x}{1+x}$).
En déduire que la suite $(F_n(x))$ est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit x fixé, avec $-\frac{1}{2} < x < 0$. Montrer que :

$$\forall t \in [x, 0], \qquad \left|\frac{t^n}{(1+t)^{n+1}}\right| \leqslant \left|\frac{x}{1+x}\right|^n$$

En déduire que la suite $(F_n(x))$ est convergente et déterminer sa limite.