

Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1991

MATHEMATIQUES

1ere épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $A(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, et f_α l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 est $A(\alpha)$.

- (a) Calculer les valeurs propres de f_α .
(b) f_α est-il diagonalisable ?
(c) Pour quelles valeurs de α , f_α est-il un isomorphisme ?
- Déterminer une base de \mathbb{R}^3 formée de vecteurs propres de f_α .

EXERCICE 2

- On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par :
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) = x^2 + 4x + 2.$$

Étudier les variations de f sur \mathbb{R} . Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$. Résoudre $f(x) = -1$.

- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ déterminée par la donnée de $u_0 \in \mathbb{R}$, et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n^2 + 4u_n + 2$ pour tout n entier naturel.

On rappelle la définition suivante: une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite stationnaire si elle vérifie:

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow v_{n+1} = v_n).$$

Montrer qu'il existe trois valeurs de u_0 pour lesquelles la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est stationnaire.

- Montrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} + 2 = (u_n + 2)^2$. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suivant les valeurs de u_0 .

EXERCICE 3

Une urne contient p jetons numérotés de 1 à p ($p \geq 2$). On effectue N tirages successifs ($N \geq 1$): chaque tirage consiste à prendre un jeton dans l'urne, noter son numéro, puis remettre le jeton dans l'urne. Pour tout entier i compris entre 1 et p , on définit les variables aléatoires F_i et X_i comme suit:

- F_i est le nombre de fois où le jeton numéroté i a été tiré
- X_i prend la valeur 0 si le jeton numéroté i n'a pas été tiré et prend la valeur 1 si le jeton numéroté i a été tiré au moins une fois.

1. Étude des variables aléatoires F_i .

- Pour tout i compris entre 1 et p , déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire F_i .
- On considère la variable aléatoire $F = \sum_{i=1}^p F_i$.
Que vaut F ? Calculer l'espérance et la variance de F .
- Est-ce que les variables aléatoires F_i sont deux à deux indépendantes?

2. Étude des variables aléatoires X_i .

- Pour tout i compris entre 1 et p , déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X_i .
- Soient i et j deux entiers distincts compris entre 1 et p .
Déterminer la probabilité pour que $X_i = 0$ sachant que $X_j = 0$.
Est-ce que les variables aléatoires X_i et X_j sont indépendantes?
- Déterminer l'espérance de la variable aléatoire $X = \sum_{i=1}^p X_i$.

3. Application

Vous êtes responsable du service après-vente d'une chaîne de magasins. Ce service est présent sur quinze sites et, au total, il reçoit en moyenne cinquante appels par jour.

- En utilisant le début de l'exercice pour modéliser cette situation, donner une interprétation des variables aléatoires F_i , X_i et X .
- Calculer des valeurs approchées à 10^{-1} près de l'espérance de F_i , de l'espérance de X_i et de l'espérance de X .
Commenter brièvement ces résultats.

EXERCICE 4

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2) dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx.$$

1. Étude de la suite $(J_n)_{n \geq 1}$.

(a) Calculer J_1 .

(b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$.

(c) Étudier la convergence de la suite $(J_n)_{n \geq 1}$.

2. **Étude de la suite** $(I_n)_{n \geq 1}$.

(a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

(b) Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n \geq 1}$.

(c) Déterminer un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.