Programme ESC d'E.M.LYON

CONCOURS D'ENTREE 1993

MATHEMATIQUES

1ère épreuve (option économique)

Les candidats ne doivent pas faire usage d'aucun document; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, notée$\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer les valeurs propres de f
   On les notrera $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de sorte que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$
   (b) En déduire, sans autre calcul, les réponses aux questions suivantes :
   A est-elle diagonalisable ?
   A est-elle inversible ?
2. Pour tout $p \in \{1, 2, 3\}$, montrer qu'il existe un vecteur popre $\overrightarrow{e_p}$ de f associé à la valeur porpre λ_p dont la $p^{ième}$ coordonnée dans la base canonique $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est 1. Donner les coordonnées de $\overrightarrow{e_p}$ dans cette base.
3. Soit P la matrice de passage de $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ à la base $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\right)$. Ecrire P. Calculer P^{-1} : les calculs devront figurer sur la copie.
4. Pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, calculer A^n : on donnera de façon explicite les neufs coefficients de la matrice A^n.

EXERCICE 2

Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \end{array}$

I. Etude de f.

1. Former le tableau de variation de f

2. (a) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

   (b) Résoudre l'équation $f(x) \leqslant x$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$

3. Tracer la courbe représentative (C) de f dans un repère orthonormé d'unité 5cm, et préciser la position relative de (C) et de la première bissectrice (on ne cherchera pas d'éventuels points d'inflexion)

II. Etude d'une suite récurrente.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par: $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Que dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $u_0 = -1$ ou $u_0 = 0$?

2. On suppose ici $u_0 < -1$.

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n < -1$

   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

   (c) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on déterminera.

3. On suppose ici $-1 < u_0 < 0$.

   Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

4. On suppose ici $u_0 > 0$.

   Sans en donner de démonstration, quel résultat obtiendrait-on concernant la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans ce cas?

EXERCICE 3

Question préliminaire

Soient k et n deux entiers naturels tels que $0 < 3k \leqslant n$

1. (a) Démonter que
   pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant k-1, C_n^i \leqslant \frac{1}{2} C_n^{i+1}$
   puis que
   pour tout i tel que $0 \leqslant i \leqslant k$, $C_n^i \leqslant \frac{1}{2^{k-i}} C_n^k$

   (b) En déduire que $C_n^k \leqslant \sum\limits_{i=0}^{k} C_n^i \leqslant 2C_n^k$

Monsieur X vend des journeaux, sur le marché le samedi matin; il propose au choix, deux quotidiens A et Bet il dispose d'un stock de 40 exemplaires de A et 40 exemplaires de B.
On suppose :

- qu'aucun client ne demande A et B

- que si un client demande A (respectivement B) alors que le stock de A (respectivement B) est épuisé, il part sans demander B (respectivement A)

- que les demandes des clients sont indépendantes les unes des autres.

Un samedi, 60 clients se rpésentent dans la matiné. chaque client qui demande soit A soit Bavec la même probabiltié $0,5$.

1. Y est la variable aléatoire égale au nombre de clients qui demandent A dans cette matinée.
   Détermine la loi de Y
   Donner son espérance et sa variance.

2. On note x la probabilité de l'événement "Monsieur X ne satisfait pas toutes les demandes, cette matinée"

   (a) Exprimer x à l'aide de la loi de Y.

   (b) Déduire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev un majorant de x.

   (c) Déduire de la question préliminaire un encadrement de x.

   (d) Comparer , en utilisant des valeurs numériques approchées données en annexe, les résultats des questions **b** et **c**.

Annexe : $C_{60}^{20} \simeq 4,192.10^{15}$; $C_{60}^{19} \simeq 2.045; 10^{15}$; $C_{60}^{18} \simeq 9,250.10^{14}$

EXERCICE 4

Pour tout entier n on note:

$$I_n = \int_0^1 e^{-x^2}(1-x)^n dx \qquad \text{et} \qquad J_n = \int_0^1 xe^{-x^2}(1-x)^n dx.$$

1. (a) Former le tableau de variation sur $[0,1]$ de $x \to xe^{-x^2}$..

   (b) En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$:

   $$0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2e}(n+1)}$$

   (c) Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. (a) A l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout n de $\mathbb{N}$:

   $$I_n = \frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+1}$$

   (b) En déduire la limite de I_n et celle de $n.I_n$ quand n tend vers $+\infty$.