ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION SCIENTIFIQUE

Année 2004

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On munit $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

O désigne la matrice colonne nulle d'ordre 3.
I désigne la matrice identité (matrice unité) d'ordre 3.
Lorsque λ est une valeur propre d'une matrice carrée C , on notera $E_C(\lambda)$ le sous-espace propre associé.
Soit l'application ϕ de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ définie pour toute matrice M de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ par $\phi(M) = BM - MA$.

1. (a) Montrer que les valeurs propres de A sont -3 et 6. Déterminer $E_A(-3)$ et $E_A(6)$.
   (b) Montrer que 0 est valeur propre de B et déterminer $E_B(0)$. Montrer que $E_B(0) \subset E_A(-3)$.
   (c) Montrer que 3 est valeur propre de B et déterminer $E_B(3)$. Montrer que $E_B(3) \subset E_A(-3)$.
   (d) Montrer que (V_1, V_2)est une base orthogonale de $E_A(-3)$ formée de vecteurs propres de B.
   En déduire une matrice colonne d'ordre 3 notée V_3 et de première coordonnée égale à 1 telle que (V_1, V_2, V_3)soit une base orthogonale de $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.
   (e) Exprimer BV_3 en fonction de V_2 et V_3.
   En déduire que la matrice B est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2. (a) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Soit H une matrice carrée d'ordre 3 élément de $\ker(\phi)$.
   Montrer que
   $$(B + 3I)HV_1 = O, \quad (B + 3I)HV_2 = O, \quad (B - 6I)HV_3 = O.$$
   En déduire
   $$HV_1 = O, \quad HV_2 = O, \quad HV_3 = O$$
   et que ϕ est un isomorphisme de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Soient a et b deux valeurs propres respectives de A et de B.
   Soit X un vecteur propre de A associé à a et Y un vecteur propre de B associé à b.
   Montrer que Y^tXest non nulle et calculer $\phi(Y^tX)$. En déduire que $b - a$ est valeur propre de ϕ.

4. Soit λ une valeur propre de ϕ. Soit M une matrice carrée vecteur propre de ϕ associée à la valeur propre λ.
   (a) Montrer que :
   $$(B - (\lambda - 3)I)MV_1 = O, \quad (B - (\lambda - 3)I)MV_2 = O \quad \text{et} \quad (B - (\lambda + 6)I)MV_3 = O.$$
   (b) Montrer que :
   si $MV_1 \neq O$ alors $\lambda - 3$ est valeur propre de B.
   si $MV_2 \neq O$ alors $\lambda - 3$ est valeur propre de B.
   si $MV_3 \neq O$ alors $\lambda + 6$ est valeur propre de B.
   (c) En remarquant que $M \neq O$, montrer que MV_1, MV_2, MV_3 ne peuvent pas être tous nuls.
   En déduire que λ est la différence d'une valeur propre de B et d'une valeur propre de A.
   Donner finalement l'ensemble des valeurs propres de ϕ.

EXERCICE 2

Lorsque A et B sont deux événements d'un même espace probabilisé , on désignera par $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B , où B est un événement de probabilité non nulle : $P_B(A) = P(A/B)$.
On considère un réel strictement positif α et la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \left]0;1\right], \quad f_\alpha(t) = \alpha t^{(\alpha-1)} \quad \text{et} \quad \forall t \in \left]-\infty;0\right] \cup \left]1;+\infty\right[, \quad f_\alpha(t) = 0.$$

1. (a) Montrer que f_α est une densité de probabilité. Soit X_α une variable aléatoire de densité f_α.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de la variable X_α.
   (c) Montrer que pour tous réels a et b tels que

   $$0 < a \leqslant b \leqslant 1, \quad P_{X_\alpha \leqslant b}(X_\alpha \leqslant a) = P(X_\alpha \leqslant \frac{a}{b}).$$

   (C' est-à-dire $P(X_\alpha \leqslant a / X_\alpha \leqslant b) = P(X_\alpha \leqslant \frac{a}{b})$).

2. *Ce paragraphe étudie une fonction H vérifiant la propriété* **(R)** *:*
   (R) : H est dérivable sur $]0;1]$ et pour tous réels x et y de $]0;1]$, $H(xy) = H(x)H(y)$.

   (a) Montrer que pour tout réel t de $]0;1]$, $\left(H(\sqrt{t})\right)^2 = H(t)$. En déduire le signe de H sur $]0;1]$.
   (b) On suppose ici qu'il existe un réel β de $]0;1]$ tel que $H(\beta) = 0$.
   Montrer grâce au 2(a) et par récurrence que pour tout entier naturel n , $H(\beta^{\left(\frac{1}{2^n}\right)}) = 0$.
   En déduire par continuité de H que $H(1) = 0$, puis , que H est nulle sur $]0;1]$.
   (c) On suppose ici que pour tout réel β de $]0;1]$, $H(\beta) \neq 0$.
   c1) Montrer que H est strictement positive sur $]0;1]$. Montrer que $H(1) = 1$.
   c2) Montrer que pour tous réels x et y de $]0;1]$, $yH'(xy) = H'(x)H(y)$.
   c3) On considère la fonction V dérivable sur $]0;1]$ définie par :

   $$\text{Pour tout réel } t \in \left]0;1\right], V(t) = \ln(H(t)).$$

   Montrer que pour tout réel $t \in \left]0;1\right], V'(t) = \dfrac{H'(1)}{t}$.
   c4) Montrer que pour tout réel $t \in \left]0;1\right], V(t) = H'(1)\ln(t)$.
   En déduire que pour tout réel $t \in \left]0;1\right], H(t) = t^{H'(1)}$.

3. *On suppose dans ce paragraphe que Y est une variable à densité vérifiant les propriétés suivantes :*

   - $Y(\Omega) =]0;1]$.
   - *La fonction de répartition F_Y de Y est dérivable sur* $]0;1]$.
   - Pour tous réels a et b tels que

   $$0 < a \leqslant b \leqslant 1, \quad P_{Y \leqslant b}(Y \leqslant a) = P(Y \leqslant \frac{a}{b}).$$

   (a) Montrer que F_Y vérifie la propriété **(R)**.
   (b) En déduire qu'il existe un réel strictement positif α tel que Y et X_α suivent la même loi.

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} f(k) = 0 \text{ si } k \text{ est pair (ceci comprend } k = 0) \\ f(k) = 1 \text{ si } k \text{ est impair} \end{cases}.$$

On considère un entier naturel non nul N , et on définit les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} N_0 = N; & u_0 = f(N_0) \\ \text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, & N_{k+1} = \dfrac{N_k - u_k}{2} \text{ et } u_{k+1} = f(N_{k+1}) \end{cases}$$

1. *Deux exemples.*

   (a) Déterminer les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque $N = 27$.

   (b) Déterminer les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque $N = 2^{10}$.

2. *Dans cette question on étudie les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans le cas général.*

   (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel k :

   $$u_k \text{ existe et appartient à } \{0,1\} \text{ et } N_k \text{ existe et appartient à } \mathbb{N}.$$

   (b) Montrer que pour tout entier naturel k , $N_{k+1} \leqslant \frac{1}{2}N_k$.
   En déduire que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle.
   Montrer qu'il existe un rang n_0 à partir duquel N_k est inférieur à $\frac{1}{2}$.
   En déduire que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à n_0 , $N_k = u_k = 0$.

   (c) Montrer que pour tout entier naturel k ,

   $$2^{k+1}N_{k+1} - 2^k N_k = -2^k u_k.$$

   En déduire en sommant de $k = 0$ à n_0 que :

   $$N = 2^0 u_0 + 2^1 u_1 + \cdots + 2^{n_0} u_{n_0}.$$

   (d) Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être la suite identiquement nulle.
   Il existe donc un entier s inférieur à n_0 tel que $u_s = 1$ et pour tout k strictement supérieur à s , $u_k = 0$.

3. *Informatique.* On dispose de la fonction Turbo-Pascal définie de la manière suivante :

```
function g ( n :  integer ) :  integer ;
begin
g :  = n - 2*int ( n / 2 ) ;
end;
```

   où `int (x)` représente la fonction mathématique " partie entière de x " , aussi notée [x].
   (On rappelle que [x] est l'unique entier tel que $[x] \leqslant x < [x] + 1$).

   (a) En distinguant deux cas selon que n est pair ou impair , montrer que la fonction g n'est autre que la fonction f.

   (b) Soit d l'entier égal à la partie entière de $\dfrac{\ln(N)}{\ln(2)}$.
   Montrer que d est l'unique entier tel que $2^d \leqslant N < 2^{d+1}$.
   En déduire que l'entier s évoqué dans le 2.(d) est égal à d.

   (c) Ecrire finalement un programme utilisant la fonction `g` qui demande un entier naturel non nul N , calcule d et affiche successivement les valeurs $u_0, u_1, \cdots, u_d$.