Concours National des E.S.C.A.E.

Option technologique

Concours National d'admission 1987

MATHEMATIQUES I

PROBLEME I

I. Les calculs seront présentés sous forme de tableau; les nombres figurant dans le tableau seront arrondis à 10^{-2} près au plus proche et les calculs seront effectués à partir de ces valeurs. Les résultats, à l'exception de k, seront donnés à cette précision. Toutes les formules utilisées devront être citées.

PLAN DE COMMERCIALISATION D'UN VEHICULE NOUVEAU

Mois	11-85	12-85	01-86	02-86	03-86	04-86	05-86
Rang du mois t_i	1	2	3	4	5	6	7
Fabrication y_i	150	292	2 900	7 620	9 224	14 822	13 271

1° Sur papier logarithmique représenter le nuage de points $M_i(t_i, Y_i)$, où les Y_i représentent les effectifs cumulés de la fabrication.

2° On pose $u_i = \log t_i$, $v_i = \log Y_i$ (la notation log représente le logarithme décimal). Afin de vérifier la validité d'un ajustement linéaire de ce nuage, calculer le coefficient de corrélation linéaire entre u et v.

3° Déterminer une équation de la droite de régression de v en u; tracer cette droite sur le graphique précédent, après en avoir déterminer deux points.

4° En déduire entre Y et t une relation de la forme $Y = kt^a$ (k sera arrondi à une unité près au plus proche)/

5° Donner une estimation de la production du mois de juin 1986.

II. On suppose que la probabilité pour qu'un client ayant passé commande d'une voiture soit livré avec retard est de 0,62.

1° Un concessionnaire prend 200 commandes. On appelle X la variable aléatoire représentant le nombre de clients livrés sans retard.
Déterminer la loi de X. Donner l'expression de $P(X = k)$ en fonction de k.
Calculer l'espérance et la variance de X. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près au plus proche de l'écart-type de X.

2° Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ? (On justifiera cette approximation). En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près au plus proche de $P(X \leqslant 60)$ et de $P(X \geqslant 80)$.

III. Un concessionnaire enregistre 4 commandes.
2 couleurs A te B sont disponibles.
20 % des clients choisissent la couleur A
80 % des clients choisissent la couleur B.
Y_1 est la variable aléatoire représentant le nombre de commandes pour la couleur A.
Y_2 est la variable aléatoire représentant le nombre de commandes pour la couleur B.

1° Déterminer la loi de Y_1 et celle de Y_2. Calculer les espérances de Y_1 et Y_2.

2° On suppose que le concessionnaire a en stock 2 voitures de couleur A et 2 voitures de couleur B.

a) Soit Z la variable aléatoire représentant le nombre de véhicules livrées.
Déterminer la loi de Z et son espérance. (On donnera les valeurs exactes).

b) Un seul des quatre clients ayant passé commande n'a pu être livré.
Calculer la probabilité que ce soit un client un client ayant choisi la couleur A à 10^{-3} près au plus proche.

PROBLEME II

1. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Déterminer la matrice N telle que $A = 2I + N$ (où I représente la matrice identité d'ordre 3). Calculer N^2 et N^3.

   b) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, $\quad A^n = 2^n I + n2^{n-1}N + n(n-1)2^{n-1}N^2$.

   c) Montrer que A est inversible et expliciter A^{-1}.

2. Soit f la fonction qui à tout réel x associe $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$, où a, b, c sont des paramètres réels.

   a) Démontrer qu'il existe trois réels a_1, b_1, c_1 tels que, pour tout x réel,

   $$f'(x) = (a_1x^2 + b_1x + c_1)e^{2x}$$

   Exprimer a_1, b_1, c_1 en fonction de a, b, c. Ecrire cette relation matriciellement.

   b) Plus généralement, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^{\times}$, la dérivée $n^{ième}$ de f vérifie, pour tout réel x

   $$f^{(n)}(x) = (a_nx^2 + b_nx + c_n)e^{2x}$$

   où a_n, b_n, c_n sont trois réels. Vérifier que pour tout $n \geqslant 2$:

   $$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

   Calculer a_n, b_n, c_n en fonction de a, b, c et n.

   c) Montrer que f admet une primitive F vérifiant pour tout x réel

   $$F(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)e^{2x},$$

   où α, β, γ sont trois réels que l'on déterminera en fonction de a, b, c.

3. *Applications* : $a = 2$, $b = -2$, $c = 1$.

   a) Etudier les variations de f. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser. Etudier la dérivabilité de la bijection réciproque f^{-1} de f (on ne cherchera pas à expliciter f^{-1}).

   b) Déterminer les points d'inflexions de la courbe (C) représentant les variations de f. Ecrire une équation de la tangente en chacun de ces points.

   c) Tracer (C) dans un repère orthonormé (unité : 5 cm) sur une feuille de papier milimétré fournie.

   d) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$.

   e) Etudier la convergence de $\int_{-\infty}^{0} f(x)dx$ et celle de $\int_{0}^{+\infty} f(x)dx$.

   f) Montrer que l'équation $f(x) = -x$ admet une solution réelle unique t. Donner un encadrement de t à 10^{-2} près.