Concours National des E.S.C.A.E.

Option générale prime et économique

Concours National d'admission 1988

MATHEMATIQUES II

Statistiques et probabilités

EXERCICE I

N.B. Toutes les valeurs nécessaires pour traiter les calculs statistiques demandés dans un (ou plusieurs) tableau dont les lignes et les colonnes seront séparées par des traits tracés à la règle. Toutes les valeurs numériques approchées données dans un tel tableau ou en réponse aux questions posées seront arrondies, au plus proche, à 0,01 près

On a relevé les superficies, en hectares, des 52 exploitations agricoles d'une commune rurale et on a ainsi obtenu une variable statistique classée, notée X.

Les résultats de cette enquête sont représentés par le nuage des points $M_i(N_i, s_i)$ sur la feuille de papier semi-logarithmique jointe au sujet.

Pour chacun de ces points, N_i est le nombre d'exploitations agricoles dont la superficie est au moins égale à s_i hectares.

1. Les s_i étant étant les bornes inférieures des classes utilisées dans cette statistique et la borne supérieure de la dernière classe étant 140 hectares, calculer la moyenne arithmétique et l'écart-type de la distribution de X.

2. Le nuage de points étant sensiblement rectiligne écrire une équation de la droite des moindres carrés permettant de déterminer les valeurs ajustées des N_i.
   Déterminer deux de ses points puis tracer cette droite sur le graphique précédent.
   Utiliser la relation $N = f(s)$ résultant de cet ajustement linéaire pour calculer les effectifs ajustés $\widehat{N_i}$ correspondant à chacune des dix valeurs s_i.

3. Expliquer pourquoi la droite d'ajustement tracée précédemment permet d'obtenir une estimation graphique des trois quartiles de la distribution de X.
   En utilisant ce procédé donner vos valeurs estimées de ces trois paramètres.

4. Déterminer, par le calcul, la médiane de la distribution de X.

EXERCICE II

La durée de vie (ou duré de bon fonctionnement), exprimée en semaines, d'un composant électronique équipant de nombreux appareils définit une variable aléatoire continue X régie par une loi exponentielle.

On a constaté expérimentalement que 95,12 % de ces composants étaient encore en état de marche au bout de 25 semaines de fonctionnement.

1. Montrer que cette constatation permet de fixer à 0,002 le paramètre de cette loi exponentielle.

DANS TOUTE LA SUITE DE L'EXERCICE LE PARAMETRE DE X SERA EGAL A 0,002

2. Quelle est la probabilité qu'un composant de ce type soit encore en état de marche au bout de 100 semaines de fonctionnement ?

3. Sachant que l'un de ces composants a bien fonctionné pendant 100 semaines, quelle est la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de la 150^e semaine ?

4. Dans cette question, on étudie un premier appareil dans lequel dix composants du type étudié commandent chacun un organe.
   Ils sont montés " en série " c'est-à-dire que le système (S) de ces dix composants cesse de fonctionner dès que l'un au moins d'entre eux est en panne (les composants tombent en panne indépendamment les uns des autres).
   La durée de vie, toujours exprimée en semaines, de ce système (S) définit une autre variable continue T.

   (a) Quelle est la loi de probabilité de l'évènement $(T \geqslant 50)$?

   (b) t étant un réel positif ou nul, quelle est la probabilité que ce système fonctionne pendant au moins t semaines ?

   (c) Déterminer la fonction de répartition de T et en déduire que cette variable aléatoire suit aussi une loi exponentielle dont on déterminera le paramètre.
   Quelle est l'espérance mathématique de la durée de vie du système (S) ?

5. Dans cette question, on étudie un second appareil comprenant seulement deux composants du type précédent.
   Ils sont montés " en parallèle " c'est-à-dire que ce système (S') fonctionne si au moins un des deux composants est encore en état de marche (comme précédemment les composants tombent en panne indépendamment les uns des autres).
   Quelle est la probabilité que ce système (S') fonctionne pendant au moins 100 semaines ?

EXERCICE III

Une étude sur le comportement des automobilistes a permis de constater que, dans les grandes villes, les contrevenants aux règles de stationnement se divisent en deux catégories :

- un sur quatre est un contrevenant involontaire (par exemple, dépassement du temps de stationnement dû à une longue file d'attente à la caisse d'un magasin)

- trois sur quatre sont des contrevenants volontaires (par exemple, stationnement gênant le temps d'effectuer un achat)

La probabilité qu'un contrevenant involontaire soit verbalisé est $\dfrac{1}{40}$ mais pour un contrevenant volontaire, généralement plus méfiant, elle est seulement $\dfrac{1}{60}$.

1. Quelle est la probabilité qu'un stationnement irrégulier soit sanctionné ?

2. Une contravention ayant été dressé pour stationnement irrégulier, quelle est la probabilité que le conducteur du véhicule soit un contrevenant volontaire ?

3. Au cours de ses activités professionnelles, un certain contrevenant volontaire se trouve 300 fois dans l'année en stationnement irréguliers et a donc, chaque fois, une probabilité de $\dfrac{1}{60}$ d'être verbalisé.

   (a) Quelle est la probabilité qu'il soit verbalisé k fois dans l'année pour stationnement irrégulier ?

   (b) Combien de fois est-il, en moyenne, verbalisé pour ce motif au cours d'une année ?

   (c) En utilisant une approximation que l'on justifiera soigneusement calculer la probabilité qu'il soit verbalisé au moins 5 fois dans l'année pour ce motif.

DANS TOUTE LA SUITE DE L'EXERCICE ON SUPPOSE
QUE 10 % DES STATIONNEMENTS SONT IRREGULIERS

4. Tout véhicule en stationnement régulier a une probabilité de $\frac{1}{40}$ d'être contrôlé et tout véhicule contrôlé se trouvant en stationnement irrégulier fait l'objet d'une contravention.
Quelle est la probabilité qu'un véhicule en stationnement soit contrôlé ?
Les évènements " être contrôlé " et " stationner irrégulièrement " sont-il dépendants ou indépendants en probabilité ?

5. Un contractuel contrôle 800 véhicules par jour et dresse contravention pour tout véhicule en stationnement irrégulier.
Le nombre quotidien de contraventions qu'il dresse définit une variable aléatoire discrète Q.

   (a) Quelle est la loi de probabilité de Q ?
   Calculer son espérance et sa variance.

   (b) Montrer que l'on peut approcher la distribution de Q par une loi normale dont on précisera les paramètres.
   N.B. σ sera arrondi, au plus proche, à 0,1 près

   (c) A l'aide de l'approximation faite en b calculer les probabilités des évènements suivants :
   - le contractuel dresse moins de 20 contraventions
   - le contractuel dresse moins de 90 contraventions
   - le contractuel dresse moins de 100 contraventions sachant qu'il en a dressé au moins 60

   N.B. Pour traiter cette question les valeurs de la variable centrée réduite nécessaires aux calculs seront arrondies, au plus proche, à 0,01 près