Concours National des E.S.C.A.E.

Option technologique

Concours National d'admission 1990

MATHEMATIQUES I

EXERCICE I

La fonction f de $]-1,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]-1,+\infty[, \quad f(x) = \ln(2x+2) + \ln(3x+6) - \ln(x+3) - \ln(x+4)$$

où ln désigne le logarithme népérien.

1. Démontrer que f admet, en $+\infty$, une limite a.
2. Etudier les variations et donner le tableau de variation de f.
3. Résoudre dans $]-1,+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$
4. Dessiner, sur papier milimétré, la courbe représentative de f : on prendra, en abscisse, l'unité égale à 5 mm et, en ordonnée, l'unité égale à 5 cm; on placera nécessairement les points d'abscisses 10, 20, 30, 40
5. Résoudre dans $]-1,+\infty[$ l'inéquation : $f(x) \geqslant a - 0,1$ et donner une valeur approchée à 0,1 près par excès du plus petit réel b solution de cette inéquation. Vérifier graphiquement le résultat obtenu.
6. (a) Soit c un réel strictement positif.
   Calculer l'intégrale $I = \int_0^{10} \ln(x+c)dx$ en fonction de c.

   (b) En déduire l'intégrale $J = \int_0^{10} f(x)dx$ et en donner une interprétation géométrique de cette intégrale

EXERCICE II

On s'intéresse à une société qui fabrique différents modules électroniques M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 à l'aide de robots programmables.

PARTIE I

Une étude statistique portant sur le nombre de modules M_1 commandés par jour à cette société a fourni la distribution suivante :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
s_n	0	1	3	8	12	13	16	12	13	9	5	5	2	1

Dans ce tableau, n désigne le nombre de module M_1 commandés et s_n le nombre de jours pour lesquels le nombre de module M_1 commandés est égal à n

1. Quelles sont la moyenne et la variance de la statistique (n_i, s_i) ?

2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ et $v_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ avec $\lambda = 6,51$

   On pose également : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \dfrac{1}{100}\sum\limits_{k=0}^{n} s_k = \dfrac{1}{100}(s_0 + s_1 + \cdots + s_n)$ (les réels w_k sont donc les fréquences cumulées croissantes de la série (n, s_n))

   Les valeurs de u_n et v_n arrondies à 0,001 près au plus proche pour $0 \leqslant n \leqslant 13$ sont données dans le tableau suivant :

n	u_n	v_n
0	0,0015	0,0015
1	0,0097	0,0112
2	0,0315	0,0427
3	0,0684	0,1112
4	0,1114	0,2226
5	0,1450	0,3676
6	0,1574	0,5249
7	0,1463	0,6713
8	0,1191	0,7904
9	0,0861	0,8765
10	0,0561	0,9326
11	0,0332	0,9658
12	0,0180	0,9838
13	0,0090	0,9928

   (a) Représenter, sur papier milimétré, le nuage de points $P_n(v_n, w_n)$; on prendra l'unité égale à 10 cm.

   (b) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre v et w.

   (c) Déterminer l'équation de la droite de régression de w en v et tracer cette droite en précisant, au préalable les coordonnées de deux de ses points.
   N.B. Les calculs seront présentés sous forme de tableaux; les résultats seront arrondis, au plus proche, à 0,001 près et on citera toutes les formules utilisées.

PARTIE II

Dans cette partie, on désigne par D la variable aléatoire égale au nombre de demandes journalières de modules M_1 et on suppose que D suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 6,51$. On suppose également que chaque robot produit un module M_1 par jour.

1. Déterminer le plus petit entier n tel que : $P(D \leqslant n) \geqslant 0,95$

2. On décide de faire travailler 12 robots par jour. De plus, l'expérience a montré que la probabilité qu'un robot fonctionne un jour donné est 0,7 et, en outre, les robots fonctionnent indépendamment les uns des autres. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de robots qui, parmi les douze, fonctionnent le jour donné.

   (a) Quelle est la loi de N ? Calculer à 10^{-3} près au plus proche les probabilité $p(N = k)$ pour toutes les valeurs possibles de k.

   (b) On suppose que D et N sont indépendantes. Calculer à 10^{-3} près au plus proche la probabilité de satisfaire la demande journalière en modules M_1.

PARTIE III

Les robots utilisés par la société peuvent réaliser 5 types de modules M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 à partir de 3 composants électroniques C_1, C_2 et C_3.

On note : c_i le nombre de composants C_i dont dispose chaque robot chaque semaine
m_i le nombre de modules M_i produits par chaque robot chaque semaine

et on suppose que chaque robot doit être programmé de manière à épuiser le stock de composants dont il dispose.

La fabrication d'un module M_1 nécessite 1 composant C_1, 1 composant C_2 et 2 composants C_3
La fabrication d'un module M_2 nécessite 2 composants C_2 et 2 composants C_3
La fabrication d'un module M_3 nécessite 4 composants C_1, 1 composant C_2 et 3 composants C_3
La fabrication d'un module M_4 nécessite 6 composants C_1, 1 composant C_2 et 5 composants C_3
La fabrication d'un module M_5 nécessite 1 composant C_1 et 3 composants C_2

1. Ecrire le système d'équations linéaires liant m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 et c_1, c_2, c_3.
2. Lorsque $c_1 = 34$, $c_2 = 26$ et $c_3 = 44$, en déduire le système linéaire (S) satisfait par m_1, m_2, m_3 en prenant m_4 et m_5 comme paramètres.
3. Résoudre le système (S) par la méthode du pivot de Gauss.
4. Représenter graphiquement sur une feuille de papier milimétré le domaine de plus dont les coordonnées (m_4, m_5) vérifient les inéquations :

$$m_1 \geqslant 0, \quad m_2 \geqslant 0, \quad m_3 \geqslant 0, \quad m_4 \geqslant 0, \quad m_5 \geqslant 0$$

   On prendra un repère orthonormé avec des vecteurs unitaires de 4 cm et on tracera en noir les segments " frontières " du domaine Δ.
5. Le mot " écu " désignant l'unité monétaire, on sait que la vente de
   - un module M_1 rapporte un bénéfice de 1 écu;
   - un module M_2 rapporte un bénéfice de 4 écus;
   - un module M_3 rapporte un bénéfice de 1 écu;
   - un module M_4 rapporte un bénéfice de 2 écus;
   - un module M_5 rapporte un bénéfice de 4 écus;

   (a) Calculer en fonction de m_4 et m_5 le bénéfice hebdomadaire B.

   (b) Dessiner, sur le graphique de la question 4, les droites correspondant à un bénéfice respectif de 24 écus, 30 écus et 40 écus

   (c) Déterminer graphiquement le point du domaine Δ pour lequel le bénéfice B est maximum; préciser la valeur de ce bénéfice ainsi que les valeurs correspondantes de m_1, m_2, m_3, m_4, m_5