ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE COMPIEGNE
CONCOURS D'ADMISSION 1986
Option générale
MATHEMATIQUES I

PROBLEME I

Soit E l'espace vectoriel réel de dimension 3 et $B_0 = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ sa base canonique.

- F est le sous-ensemble de E défini par :

$$F = \{x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + x\,\overrightarrow{k} \quad / \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

- $\mathcal{M}$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
- f l'endomorphisme de E dont la matrice A dans la base B_0 est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose :

$$\overrightarrow{e_1} = 2\,\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 2\,\overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \quad \text{et} \quad B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$$

PARTIE 1.

1. Montrer que F est sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que B est une base de F.
3. Montrer que pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de E, $f(\overrightarrow{u})$ est élément de F.
4. Déterminer le noyau et l'espace image de f.

PARTIE 2.

E et F sont rapportés respectivement à leur base B_0 et B.

1. φ_1 est l'application linéaire de E dans F définie par :

$$\forall \overrightarrow{u} \in E, \quad \varphi_1(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u}).$$

   Quelle est la matrice A_1 de φ_1 ?

2. φ_2 est l'application linéaire de F dans E définie par :

$$\forall \overrightarrow{u} \in F, \quad \varphi_2(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u}).$$

   Quelle est la matrice A_2 de φ_2 ?

3. φ_3 est l'application linéaire de F dans F définie par :

$$\forall \overrightarrow{u} \in F, \quad \varphi_3(\overrightarrow{u}) = f(\overrightarrow{u})$$

   Quelle est la matrice A_3 de φ_3 ?

PARTIE 3.

1. Ecrire le produit matriciel $A_2.A_1$ en fonction de A.
2. Ecrire le produit matriciel $A_2.A_3.A_1$ en fonction de A.
   On pose $A^0 = I$.
3. Calculer A^k pour $k \in \mathbb{N}$.
4. P est un polynôme de la variable réelle x, à coefficients a_k réels,
$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$
   Donner l'expression de $P(A)$ dans les cas suivants :
   (a) les coefficients de $P(A)$ sont quelconques.
   (b) $a_k = k$
   (c) $a_k = ak + b \qquad (a, b) \in \mathbb{R}^2$.
   (d) $a_k = q^k$ avec $q \in \mathbb{R}$.
   Discussion.

PROBLEME II

PARTIE 1.

v est la suite réelle définie par :
$$\begin{cases} v_0 = \dfrac{1}{4} \\ v_{n+1} = \dfrac{2v_n}{(n+1)v_n + 1} \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1. Calculer v_1, v_2, v_3.
2. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{1}{n+3} < v_n < \dfrac{1}{n}$.
3. Montrer que la suite v est décroissante et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ quand n tend vers $+\infty$.

PARTIE 2.

On pose $u_n = \dfrac{1}{v_n}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de n et de u_n.
2. Déterminer les réels a et b pour que la suite w définie par $w_n = v_n = an + b$ soit une suite géométrique.
3. Calculer w_n en fonction de n et déduire l'expression de v_n en fonction de n.

PARTIE 3.

1. L'écriture $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n$ a-t-elle un sens ?
2. Calculer $S_1 = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
3. Pour $m \in \mathbb{N}$ et $m \geqslant n$, calculer
$$S_2 = \sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

PARTIE 4.

Le plan P est rapporté au repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $3.2^{-x} + x + 1 > 0$.

2. $f(x) = \dfrac{1}{3.2^{-x} + x + 1}$
   Que représente la restriction de f à $\mathbb{N}$?

3. Pour $x \in \mathbb{R}$, étudier les variations de f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$.

4. Déduire de l'étude précédente que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution notée α.
   Déterminer un entier naturel n, tel que : $\alpha \in]n, n+1[$.

5. Détermination par interpolation linéaire, d'une valeur approchée de α :
   Soit A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse n, et B le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $n+1$.

   (a) Déterminer l'équation de la droite AB.

   (b) La droite AB coupe la première bissectrice des axes en un point M d'abscisse α_*.
   Calculer α_* (valeur approchée de α).