ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE COMPIEGNE
CONCOURS D'ADMISSION 1990
Option générale
MATHEMATIQUES I

PROBLEME

DONNEES DU PROBLEME

a) $\mathbb{R}[x,n]$ est l'espace vectoriel réel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.
On pose : $e_0(x) = x^0 = 1$ et pour : $1 \leqslant k \leqslant n \quad e_k(x) = x^k$.
$\mathcal{B}_n = \{e_0, e_1, ..., e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}[x,n]$.

b) m, n et k sont des entiers naturels.
Pour $0 \leqslant k \leqslant n$, les coefficients a_k et $b_{m,k}$ sont réels.
La variable x est réelle.
Le polynôme nul, noté θ est élément de $\mathbb{R}[x,n]$.
Pour P élément de $\mathbb{R}[x,n]$, on a les écritures :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \qquad \text{ou } P = \sum_{k=0}^{n} a_k.e_k$$

Pour P polynôme de $\mathbb{R}[x,n]$, on note $P(M)$ le polynôme matriciel défini par :

$$P(M) = \sum_{k=0}^{n} a_k.M^k$$

c) La famille t de trinômes est définie par :

$$t_m = e_2 - ((-1)^m + 5^m)e_1 + (-5)^m e_0.$$

PREMIERE PARTIE

La suite réelle u est définie par : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et par la relation de récurrence :

$$u_{m+2} - 4u_{m+1} - 5u_m = 0$$

1. Calculer u_2 et u_3.

2. Démontrer que la suite u est définie et unique.

3. On pose : $v_m = u_{m+1} + u_m$.
Démontrer que v est une suite géométrique. On donnera la raison et le premier terme.

4. Démontrer que : $u_m = \sum\limits_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k-1}.v_k$.

5. En déduire l'expression de u_m en fonction de m.

DEUXIEME PARTIE

$\varphi_{m,n}$ est l'application qui à P élément de $\mathbb{R}[x,n]$, fait correspondre : $\varphi_{m,n}(P) = t_m P$.
On a $\varphi_{m,n}(P) = \sum\limits_{k=0}^{n+2} b_{m,k}.e_k$.

1. Ecrire les coefficients $b_{m,k}$ en fonction de m et des coefficients a_k.
2. Démontrer que $\varphi_{m,n}$ est une application linéaire de $\mathbb{R}[x,n]$ dans $\mathbb{R}[x,n+2]$.
3. Quelle est la dimension de l'espace-image de $\varphi_{m,n}$, noté $\operatorname{Im}\varphi_{m,n}$?
4. Ecrire la matrice de $\varphi_{m,n}$ quand $\mathbb{R}[x,n]$ et $\mathbb{R}[x,n+2]$ sont rapportés aux bases $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_{n+2}$.

TROISIEME PARTIE

On donne la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

1. Calculer $t_1(A)$ et en déduire que $A^m = \alpha_m A + \beta_m I$ où α et β sont des suites.
2. Résoudre les suites α et β. Vérifier que $\alpha_m \neq 0$ et $\beta_m \neq 0$.
3. Montrer que :
   (a) $\alpha_{2m} = ((-1)^m + 5^m)\alpha_m$
   (b) $\beta_m = ((-1)^m + 5^m)\beta_m - (-5)^m$.
4. Ecrire la matrice A^m.
5. Calculer : $t_m(A_m)$.

QUATRIEME PARTIE

$\mathbb{M}$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.
$E[M,n]$ est le sous-ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[x,n]$ qui admettent M pour racine.

1. $m = 1$
   (a) Déterminer : $E[A,0]$, $E[A,1]$ et $E[A,2]$.
   (b) Démontrer que $E[A,n+2] = \operatorname{Im}\varphi_{1,n}$.
2. Etude du cas général
   (a) Déterminer : $E[A^m,0]$, $E[A^m,1]$ et $E[A^m,2]$
   (b) Démontrer que $E[A^m,n+2] = \operatorname{Im}\varphi_{m,n}$.

PROBLEME N° 2

DONNEES ET NOTATIONS

1. n et k sont des éléments de $\mathbb{N}$.
   I est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$.
2. t est une variable réelle, α un réel non nul et Q un polynôme à coefficients réels défini par :

$$Q(t) = \sum_{k \in I} a_k t^k$$

3. La somme S_n et la série S sont définies par : $S_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} t^k$ et $S(t) = \lim\limits_{n \to +\infty} S_n(t)$.

4. Pour une expérience aléatoire E, on note :

   - Ω le référentiel
   - X la variable aléatoire réelle définie par : $X(\Omega)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$.
   - Pour $k \in X(\Omega)$, $P(X = k) = p_k$ est la probabilité d'avoir $X = k$.
   - f_X la fonction génératrice de X définie par : $f_X(t) = \sum\limits_{k \in X(\Omega)} t^k.p_k$

5. $X_1, X_2, ..., X_n$ sont des variables aléatoires réelles totalement indépendantes, égales à X.
   On pose : $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$.
   De même : Z est une variable aléatoire réelle, et Z_1, Z_2 des variables aléatoires réelles indépendantes, égales à Z. On pose :
   $$T = Z_1 + Z_2.$$

PREMIERE PARTIE

1. Reconnaitre la somme $S_n(t)$ et donner son expression en fonction de n et t.

2. Quel est le domaine de convergence D de la série S ?

3. Pour $t \in D$, donner l'expression de $S(t)$.

4. Pour $t \in]-\dfrac{1}{\alpha}, \dfrac{1}{\alpha}[$, montrer que : $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (\alpha.t)^n = \dfrac{1}{1 - \alpha.t}$

DEUXIEME PARTIE

1. A quelles conditions sur les conditions a_k peut-on assimiler Q à la fonction génératrice d'une variable aléatoire X ?

2. Quelle est la loi de probabilité $(X, P(X))$ correspondante ?

3. Démontrer que : $E(X) = Q'(1)$ et $V(X) = Q''(1) + Q'(1) - (Q'(1))^2$.

TROISIEME PARTIE

Dans cette partie : $Q(t) = at + b$

1. Ecrire les conditions sur a et b pour que Q soit la fonction génératrice d'une variable aléatoire X.

2. Reconnaitre la loi $(X, P(X))$ et donner ses caractéristiques.

3. Quelle est la loi $(Y, P(Y))$? Donner ses caractéristiques.

4. Donner l'expression de la fonction génératrice f_Y de Y.

QUATRIEME PARTIE

Dans cette partie : $Q(t) = (at + b)^n$

1. Ecrire les conditions sur a et b pour que Q soit la fonction génératrice d'une variable aléatoire Y.

2. Reconnaitre la loi $(Y, P(Y))$.
   (On donnera l'expression de la probabilité $P(Y = k)$).

CINQUIEME PARTIE

Dans cette partie, f est la fonction numérique de la variable réelle t définie par :

$$f(t) = \frac{at}{1 - bt}$$

où a et b sont des réels.

1. En se référant à la troisième question de la première partie et en écrivant les contraintes sur t, a et b : montrer que f peut être assimilée à la fonction génératrice d'une variable aléatoire Z.
2. Reconnaitre la loi $(Z, P(Z))$ et donner ses caractéristiques.
3. Quelle est la loi de probabilité $(T, P(T))$? Donner ses caractéristiques.
4. Donner l'expression de la fonction génératrice f_T de T.