CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES II

Année 1978

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PROBLEME

Soit $A(\lambda)$ une matrice polynomiale carrée d'ordre n, c'est-à-dire une matrice à n lignes et n colonnes dont les éléments sont des polynômes en λ. Les coefficients de ces polynômes et les variables λ sont supposés réels.
La matrice $A(\lambda)$ peut être écrire sous la forme d'un polynôme en λ dont les coefficients sont des matrices carrées scalaires d'ordre n :

$$A(\lambda) = A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \cdots + A_{m-1}\lambda + A_m$$

Un tel polynôme est appelé " polynôme matriciel " afin de le différencier d'un polynôme ordinaire à coefficients numériques, appelé polynôme scalaire. Il est nul si et seulement si tous ces coefficients sont des matrices nulles.
Le nombre m est le <u>degré</u> du polynôme $A(\lambda)$ à condition que la matrice A_0 soit différent de la matrice nulle; l'ordre n des matrice $\overline{A(\lambda)}$ et A_i est <u>l'ordre</u> du polynôme; le polynôme $A(\lambda)$ est dit régulier si et seulement si le déterminant de A_0 (noté $\det A_0$ ou $|A_0|$ n'est pas nul).
Les opérateur sur les matrices permettant d'étendre aux polynômes matriciels d'ordre n les opérations fondamentales connues sur les polynômes scalaires. Ainsi, étant donnés deux polynômes matriciels $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ de même ordre n et de degré respectifs m et p avec par exemple $m \geqslant p$,

$$\begin{array}{ll} A(\lambda) = A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \cdots + A_m & \qquad A_0 \neq 0 \\ B(\lambda) = B_0\lambda^p + B_1\lambda^{p-1} + \cdots + B_p & \qquad B_0 \neq 0 \end{array}$$

nous définirons les opérations suivantes :

a) Addition ($\varepsilon = 1$) ou soustraction ($\varepsilon = -1$)

$$A(\lambda) + \varepsilon B(\lambda) = C_0\lambda^m + C_1\lambda^{m-1} + \cdots C_i\lambda^{m-i} + \cdots + C_m$$

où les coefficients C_i sont égaux à :

$$\begin{cases} C_i = A_i & \text{si } p < i \leqslant m \\ C_i = A_i + \varepsilon B_i & \text{si } i \leqslant p \end{cases}$$

b) Multiplication

$$A(\lambda)B(\lambda) = A_0B_0\lambda^{m+p} + (A_0B_1 + A_1B_0)\lambda^{m+p-1} + \cdots + A_mB_p$$

QUESTION I

a. Peut-on trouver sur l'ensemble des polynômes matriciels en λ d'ordre n ainsi définis, une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?

b. Le produit de deux polynômes matriciels est-il commutatif ?
Que peut-on dire du degré du produit de deux polynômes matriciels de degrés respectifs m et p ?
On suppose $n \leqslant 3$; à quelles conditions sur $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ le produit $A(\lambda).B(\lambda)$ est-il régulier ?

QUESTION II

Soit $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ deux polynômes matriciels de même ordre n et de degrés respectifs m et p, tels que $B(\lambda)$ soit régulier et $m \geqslant p$

$$\begin{array}{ll} A(\lambda) = A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \cdots + A_m & \qquad A_0 \neq 0 \\ B(\lambda) = B_0\lambda^p + B_1\lambda^{p-1} + \cdots + B_p & \qquad |B_0| \neq 0 \end{array}$$

On appelle respectivement " quotient à droite " et " reste à droite " de la division de $A(\lambda)$ par $B(\lambda)$ les polynômes $Q(\lambda)$ et $R(\lambda)$ satisfaisant aux conditions :

$$\begin{cases} A(\lambda) = Q(\lambda)B(\lambda) + R(\lambda) \\ \quad \deg R(\lambda) < \deg B(\lambda) \end{cases}$$

On admettra que ces polynômes $Q(\lambda)$ et $R(\lambda)$ existent et sont uniques lorsque le diviseur $B(\lambda)$ est un polynôme régulier. Lorsque $R(\lambda) = 0$, $A(\lambda)$ est <u>divisible</u> à droite par $R(\lambda)$.

a. En prenant $m = 3$ et $p = 2$ les polynômes $A(\lambda)$ et $B(\lambda)$ s'écrivent

$$\begin{array}{ll} A(\lambda) = A_0\lambda^3 + A_1\lambda^2 + A_2\lambda + A_3 & \\ B(\lambda) = B_0\lambda^2 + B_1\lambda + B_2 & \qquad |B_0| \neq 0 \end{array}$$

En appliquant le schéma habituel de la division suivant les puissances décroissantes des polynômes scalaires, exprimer le quotient à droite $Q(\lambda)$ et le reste à droite $R(\lambda)$ de la division de $A(\lambda)$ par $B(\lambda)$ en fonction des matrices A_0, A_1, A_2, A_3, B_0, B_1, B_2.

b. Appliquer ces résultats ci-dessus pour expliciter le quotient et le reste à droite de la division de

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^3 + 2\lambda + 1 & 2\lambda^3 + \lambda^2 \\ -\lambda^3 - \lambda^2 + 2 & 3\lambda^3 + 4\lambda \end{pmatrix} \quad \text{par} \quad B(\lambda) = \begin{pmatrix} 2\lambda^2 + 3 & -\lambda^2 + 1 \\ -\lambda^2 - 1 & \lambda^2 + 2 \end{pmatrix}$$

QUESTION III

Soit $F(\lambda)$ un polynôme matriciel d'ordre n et de degré m. Il peut être écrit : soit :

$$(1) \qquad F(\lambda) = F_0\lambda^m + F_1\lambda^{m-1} + \cdots + F_i\lambda^{m-i} + \cdots + F_{m-1}\lambda + F_m \quad (F_0 \neq 0)$$

soit :

$$(2) \qquad F(\lambda) = \lambda^m F_0 + \lambda^{m-1}F_1 + \cdots + \lambda^{m-i}F_i + \cdots + \lambda F_{m-1} + F_m$$

compte tenu du fait que λ est un scalaire.
Une matrice A d'ordre n étant donné, on appelle valeur à droite de $F(\lambda)$ pour A la matrice

$$F(A) = F_0A^m + F_1A^{m-1} + \cdots + F_iA^{m-i} + \cdots + F_{m-1}A + F_m$$

obtenue par substitution de A au scalaire λ dans la forme (1). De même la valeur à gauche de $F(\lambda)$ pour A s'obtiendrait en substituant A à λ dans (2).
On note E la matrice unité d'ordre n

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a. En prenant successivement $m = 2$ puis $m = 3$, déterminer en fonction de A et des coefficients de $F(\lambda)$ le reste de la division suivant les puissances décroissantes de $F(\lambda)$ par le polynôme matriciel $(\lambda E - A)$
A quelle condition le polynôme matriciel $F(\lambda)$ est-il divisible à droite par $(\lambda E - A)$ dans chacun des cas $m = 2$ puis $m = 3$.

b. Le résultat trouvé peut-il être étendu à un degré m quelconque ?

QUESTION IV

Soit A une matrice carrée scalaire d'ordre 2, de terme général a_{ij} (l'indice de gauche désigne systématiquement la ligne, celui de droite la colonne) et $C = \lambda E - A$ la matrice dont le déterminant $\Delta(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ est le polynôme caractéristique de A.
On note $B(\lambda)$ la matrice dont le terme général b_{ij} ($i^{\text{ème}}$ ligne, $j^{\text{ème}}$ colonne) est donné par :

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \det(C_{ij})$$

où C_{ij} est la sous-matrice de C obtenue par suppression du polynôme caractéristique $\Delta(\lambda)$. Que peut-on dire de la matrice $\Delta(A)$?

EXERCICE I

Dans une entreprise, on relève durant le mois de mai, sur un échantillon d'une centaine d'employés, la distribution statistique suivante du couple de la variable (X, Y) défini par :
X = âge de l'employé
Y = nombre de journées d'absence en mai

Classe d'âge	$X \diagdown Y$	0	1	2	3
20-30	25	2	10	6	2
30-40	35	15	10	5	0
40-50	45	2	18	15	5
50-60	55	0	2	4	4

Dans la suite nous ferons l'hypothèse suivante : les âges sont répartis en 4 classes [20,30[, [30,40[, [40,50[, [50,60[et à tous les employés d'une même classe est attribué le même âge égal au centre de la classe (25,35,45,55)

Question

Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en X en utilisant directement, sans le démontrer, les formules du cours. Tracer dans un repère orthonormé d'axes $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$ la droite de régression de Y en X.

EXERICE II

Soit f une fonction réelle de deux variables réelles indépendantes x et y définie par :

$$f(x, y) = 9x^2 + 8xy + 3y^2 - x + 2y$$

Question 1

Déterminer s'il existe ou s'ils existent, le ou les extrema de f (on précisera la nature du ou des extrema).

Question 2

Calculer $z(X,Y) = f(X + \frac{1}{2}, Y - 1) + \frac{5}{4}$
Démontrer l'inégalité $z(X,Y) > 0$ pour tout couple $(X,Y) \neq (0,0)$
Etudier les courbes $z(X,Y) = k$ suivant les valeurs réelles de k.