CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1982

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Toutes les matrices considérées dans ce problème sont à coefficients réels.
La matrice A a n lignes et p colonnes $(n,p) \in \mathbb{N}^\times \times \mathbb{N}^\times$ de rang égal à $\inf(n,p)$ est donnée.
Quel que soit $k \in \mathbb{N}^\times$, on désigne par I_k la matrice unité d'ordre k.

PARTIE I

1. On suppose $p < n$ et on désigne par $\Gamma(A)$ l'ensemble des matrices G carrés d'ordre n, dites invariantes à gauche de A, satisfaisant à la condition

$$(1) \qquad GA = A$$

   (a) Montrer que $\Gamma(A)$ est non vide et est stable sous la multiplication des matrices.
   (b) Montrer que le sous-ensemble $\Gamma'(A)$ de $\Gamma(A)$ formé par les matrices inversibles de $\Gamma(A)$ a une structure de groupe pour le produit matriciel.
   (c) Démontrer que toute matrice G élément de $\Gamma(A)$ admet la valeur propre $+1$. Déterminer un minorant de la dimension du sous-espace propre associé à cette valeur propre.

2. On suppose $p > n$; déterminer l'ensemble $\Gamma(A)$ défini comme dans la question 1.

PARTIE II

Dans cette partie, la matrice G élément de $\Gamma(A)$, ainsi que la matrice A, sont décomposées en deux blocs de la manière suivante :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_2 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} G_1 & \vdots & G_2 \end{pmatrix}$$

où
A_1 est une matrice carrée d'ordre p, SUPPOSEE INVERSIBLE
A_2 est une matrice à $n-p$ lignes et p colonnes
G_1 est une matrice à n lignes et p colonnes
G_2 est une matrice à n lignes et $n-p$ colonnes.

1. Exprimer le produit GA en fonction des matrices G_1, G_2, A_1 et A_2.
2. Montrer que G est parfaitement déterminée par le choix de G_2 et donner une décomposition en deux blocs de G exprimée en fonction de A_1, A_2 et G_2.
3. On désigne par $\Delta(A)$ l'ensemble des matrices D carrées dites invariantes à droite de A satisfaisant à la condition $AD = A$. On note ${}^tA$ la transposée de A.
   (a) Montrer que les ensembles $\Gamma(A)$ et $\Delta({}^tA)$ sont en bijection.
   (b) Montrer que les ensembles $\Delta(A)$ et $\Gamma({}^tA)$ sont égaux.

PARTIE III

Dans cette partie, la matrice A conserve sa décomposition en bloc définie en II, et la matrice A_1 est toujours supposée inversible. Quant à la matrice G, élément de $\Gamma(A)$, on considère sa décomposition en quatre blocs.

$$G = \begin{pmatrix} G'_1 & \vdots & G'_2 \\ \dots & \vdots & \dots \\ G'_3 & \vdots & G'_4 \end{pmatrix}$$

où
G'_1 est une matrice carrée d'ordre p.
G'_2 est une matrice à p lignes et $n-p$ colonnes
G'_3 est une matrice à $n-p$ lignes et p colonnes
G'_4 est une matrice carrée d'ordre $n-p$.

1. Etablir la relation $G'_1 = I_p - G'_2 A_2 A_1^{-1}$ et donner l'expression de G'_3 en fonction de G'_4, A_1 et A_2.
2. Soit A^d la matrice à p lignes et n colonnes décomposée en deux blocs de la manière suivante :

   $$A^q = \begin{pmatrix} A_1^d & \vdots & A_2^d \end{pmatrix}$$

   où
   A_1^d est une matrice carrée d'ordre p
   A_2^d est une matrice à p lignes et $n-p$ colonnes.

   Exprimer le produit AA^d en fonction de A_1, A_2, A_1^d et A_2^d.
3. On dit que la matrice A^d est une inverse à droite de A relative à l'élément invariant G de $\Gamma(A)$ si A, A^d et G satisfont à la relation (2)

   $$(2) \qquad AA^d = G$$

(a) Exprimer A_1^d et A_2^d en fonction des matrices A_1, A_2 et G_2'.

(b) Déduire des résultats précédents que G_2' et G_4' sont liées par la relation de compatibilité (3) suivante :

$$(3) \qquad A_2 A_1^{-1} G_2' = G_4'$$

4. Soit $\Gamma''(A)$ le sous-ensemble de $\Gamma(A)$ formé des matrices G relativement auxquelles A a un inverse à droite A^d.

   (a) Démontrer que $\Gamma''(A)$ est inclus dans $\Delta(A^d)$
   En déduire que G élément de $\Gamma''(A)$ est idempotent (c'est-à-dire : $G^2 = G$)

   (b) Montrer que G élément de $\Gamma''(A)$ est diagonalisable.

5. Soit G appartenant à $\Gamma''(A)$; on suppose qu'il existe une matrice A^g, inverse à gauche de A relativement à un élément D de $\Delta(A)$, c'est-à-dire vérifiant $A^g A = D$.
   Montrer que $A^g = A^d$.