CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

TOUTES OPTIONS

MATHEMATIQUES II

Année 1984

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

PROBLEME I

Les deux réels a et b, avec $a < b$, et l'entier naturel non nul n sont donnés; soit $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus égal à n.
On désigne par f l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & \int_a^b P(x)Q(x)dx \end{array}$$

et par $M_{q,r}$ le polynôme défini pour q et r entiers naturels tels que :

$$\begin{array}{lll} & M_{0,r}(X) = (X-a)^r(X-b)^r, & r > 0 \\ \text{et} & M_{0,0}(X) = 1 & \\ \text{et si } q > 0 & M_{q,r}(X) = \dfrac{d^q}{dX^q}\left[(X-a)^r(X-b)^r\right] & \end{array}$$

Enfin, p et q étant deux entiers naturels, on pose :

$$I_{p,q} = \int_a^b M_{q,q}(x)x^p dx$$

1. Quelle est la forme quadratique associée à f ? Est-elle définie positive ?

2. Montrer que $M_{q,q}$ est un polynôme de degré q et que $(M_{0,0}, M_{1,1}, ..., M_{n,n})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$

3. Pour $0 \leqslant p < q$, montrer que a et b sont racines d'ordre $q-p$ de $M_{p,q}$

4. Etablir la relation pour $q \geqslant 1$
$$I_{p,q} = -p \int_a^b x^{p-1} M_{q-1,q}(x)dx$$
En déduire que pour $q \geqslant p$, $I_{p,q} = K_p \int_a^b M_{q-p,p}(x)dx$, où K_p est un entier relatif, ne dépendant que de p, que l'on déterminera.

5. Prouver que $I_{p,q} = 0$ si $p > q$.

6. Calculer, pour $0 \leqslant r < q$, $\int_a^b M_{q,q}(x)M_{r,r}(x)dx$

7. On pose $A_q = \int_a^b M_{q,q}^2(x)dx$
Déterminer en fonction des A_q (que l'on ne calculera pas) la matrice de f dans la base $(M_{0,0}, M_{1,1}, ..., M_{n,n})$ de $\mathbb{R}_n[X]$

PROBLEME II

(Les questions 1 et 2 sont indépendantes)

L'entier naturel $n > 1$ et le réel $p \in]0,1[$ sont donnés : on note $q = 1 - p$.
On considère une suite de $2n$ épreuves de Bernouill, indépendantes; chacune d'elles conduit soit au succès, avec la probabilité p, soit à l'échec, avec la probabilité q.

1. (a) Soit X la variable aléatoire qui prend la valeur 0 si aucun succès n'est obtenu et la valeur i si le premier succès est enregistré à la $i^{\text{ème}}$ épreuve. Déterminer la loi de probabilité de X; calculer son espérance.
   (b) Soit Y la variable aléatoire qui prend la valeur j si, pour la première fois, on obtient 2 résultats identiques consécutifs aux épreuves de rangs $j-1$ et j et la valeur 0 si l'on a pas deux résultats consécutifs et identiques. Déterminer la loi de probabilité de Y.
   On pourra distinguer 2 cas, suivant que j est pair ou impair.

2. On prend $n = 5000$, $p = 0,51$. Evaluer la probabilité de l'évènement " le nombre des succès est compris strictement entre 4950 et 5200 "

Insérer une table de loi normale