CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1984

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Dans ce problème, on dira qu'une fonction numérique f possède un développement asymptotique à l'ordre n au voisinage de $+\infty$ si :

1. f est définie sur un intervalle du type $]\alpha, +\infty[\subset \mathbb{R}_+$
2. il existe $n+1$ nombres réels : $a_0, a_1, ..., a_i, ..., a_n$ et une fonction ε_n, avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon_n(x) = 0$, tels que :

   $$(1) \qquad f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_i}{x^i} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + (\frac{1}{x^n})\varepsilon_n(x)$$

   La formule (1) s'appelle développement asymptotique de f, à l'ordre n, au voisinage de $+\infty$
   On pose $S_n(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_i}{x^i} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}$; on l'appelle partie régulière à l'ordre n du développement asymptotique de f.

On définit de même un développement asymptotique à l'ordre n au voisinage de $-\infty$

PARTIE I

1. Démontrer que si f admet un développement asymptotique à l'ordre n, au voisinage de $+\infty$, celui-ci est unique.
2. Démontrer que si f admet un développement asymptotique à l'ordre n, au voisinage de $+\infty$, il en est de même pour la fonction g définie par :

   $$g(x) = f(x) + e^{-bx} \qquad (b > 0 \text{ donné})$$

3. Soit α un réel fixé, et soit $E_{\alpha,n}$ l'ensemble des fonctions f définies sur $]\alpha, +\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et admettant un développement asymptotique à l'ordre n au voisinage de $+\infty$.

   (a) Montrer que pour les opérations usuelles $E_{\alpha,n}$ possède d'une part une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, d'autre part une structure d'anneau commutatif unitaire.

   (b) Comment obtient-on la partie régulière du développement asymptotique du produit de deux fonctions de $E_{\alpha,n}$?

4. (a) Montrer que pour tout x strictement positif, on a :
$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{x}$$

   (b) Déterminer le développement à l'ordre $2n+1$, au voisinage de $+\infty$ de la fonction $x \mapsto \arctan x$.

   (c) Quel est le développement asymptotique à l'ordre $2n+1$ au voisinage de $-\infty$ de la fonction $x \mapsto \arctan x$

PARTIE II

Soient θ et K les fonctions de la variable réelle x définies par :
$$\theta(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \qquad \text{et} \qquad K(x) = 1 - \theta(x)$$

1. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$K(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

   (b) En déduire que pour $x > 0$:
$$K(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x^2}^{+\infty} u^{-1/2} e^{-u} du$$

2. On considère l'intégrale :
$$I_n(x) = \int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{e^{(2n+1)/2}} du \qquad \text{où } n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad x \in \mathbb{R}^{\times}$$

   (a) Prouver que quel soit n, $I_n(x)$ est convergente.

   (b) Etablir la relation de récurrence :
$$I_n(x) = \frac{e^{-x^2}}{x^{2n+1}} - \frac{2n+1}{2}.I_{n+1}(x)$$

   (c) Démontrer que pour $n \geqslant 0$:
$$\lim_{x \to +\infty} e^{x^2} I_n(x) = 0$$

3. Déduire de ce qui précède le développement asymptotique à l'ordre $2n+1$: $e^{x^2} K(x)$, au voisinage de $+\infty$.

4. Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Laplace-Gauss centrée réduite, et soit f sa fonction de répartition.

   (a) Etablir la relation :
$$2F(x) = 1 + \theta(\frac{x}{\sqrt{2}})$$

   (b) En déduire que $f(x) = 1 - e^{-x^{2/2}} H(x)$ est une fonction dont on donnera le développement asymptotique à l'ordre $2n+1$ au voisinage de $+\infty$