CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION ECONOMIQUE

MATHEMATIQUES III

Année 1988

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A est diagonalisable et expliciter une matrice diagonale D semblable à A.
   Soit k un nombre entier naturel. Calculer D^k; en déduire A^k.

2. On considère la suite (u_n) définie par la relation de récurrence : $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 3}{3u_n + 1}$, et la condition initiale $u_0 = c$, où c est un nombre réel strictement positif.
   On considère en outre les suites (v_n) et (w_n) définies par les relations de récurrence : $\begin{cases} v_{n+1} = v_n + 3w_n \\ w_{n+1} = 3v_n + w_n \end{cases}$
   et les conditions initiales : $v_0 = c$, $w_0 = 1$.

   (a) Pour tout nombre entier naturel n exprimer u_n à l'aide de v_n, et de w_n.

   (b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n et de c.

   (c) Montrer que la suite (u_n) converge et calculer sa limite.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par la relation : $f(x) = x \ln x$.

1. Étudier la variation de f.
2. Montrer qu'il existe une fonction réelle g et une seule définie sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{e}; +\infty\right[$ telle que, pour tout point x de cet intervalle : $g(x) \ln g(x) = x$.
3. Étudier la variation de la fonction g. En particulier, déterminer la limite de g en $+\infty$. Tracer sur une même figure les courbes représentatives de f et de g.
4. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln g(x)}{\ln x} = 1$. En déduire lorsque x tend vers $+\infty$ la limite de $\frac{g(x) \ln x}{x}$.

EXERCICE 3

1. Une urne contient des boules rouges et des boules blanches. La proportion de boules rouges est égale à q, où $0 \leq q \leq 1$. On effectue n tirages indépendants. avec remise, dans cette urne et on note N la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges tirées.
   Déterminer la loi de probabilité de N. Calculer son espérance et sa variance.
2. Soit r un nombre entier naturel non nul. On suppose qu'on a $(r+1)$ urnes $U_0, U_1, ..., U_r$, et que, pour tout entier j tel que $0 \leq j \leq r$, la proportion de boules rouges contenues dans l'urne U_j, vaut $\frac{j}{r}$. On choisit une urne au hasard (avec la même probabilité pour chaque urne d'être choisie) et on effectue dans cette urne n tirages indépendants, avec remise. On note N_r, la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges ainsi tirées : pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on note $p_r(k)$ la probabilité que N_r, prenne la valeur k.
   (a) Trouver la loi de probabilité de N_r, et calculer l'espérance de cette variable aléatoire.
   (b) Montrer que :
   $$\lim_{r \to +\infty} p_r(k) = \binom{n}{k} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \, dx$$
3. Soit $I_k = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} \, dx$. A l'aide d'intégrations par parties, calculer la valeur de I_k. En déduire que les nombres $\lim\limits_{r \to +\infty} p_r(k)$ ne dépendent pas de k.