CHAMBRE DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE DE PARIS
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT
Direction des Admissions et concours

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES
E.S.C.P.-E.A.P.
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

OPTION GENERALE

MATHEMATIQUES I

Année 1991

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

L'objet de ce problème est la recherche du comportement asymptotique du maximum sur $[0,1]$ d'une suite de fonction.

Partie I : Étude du maximum d'une fonction

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$$

1. *Variation de f*

   (a) Calculer la dérivée f' de f.

   (b) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution α et une seule sur $\mathbb{R}_+$.
   Indication : On étudiera la variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

   $$g(x) = (1-x)e^x + 1$$

   (c) Prouver que : $f(\alpha) = \alpha - 1$

   (d) Dresser le tableau de variation de f et donner l'allure du graphe de cette fonction.

2. *Approximation de α*
   Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :

   $$\varphi(x) = 1 + e^{-x}$$

   (a) Prouver que α est l'unique solution de l'équation $\varphi(x) = x$.

(b) Montrer que $\alpha > 1$. En déduire que :

$$\alpha - 1 < e^{-1}$$

(c) Établir que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1 :

$$\varphi(x) \geqslant 1$$

et que

$$|\varphi(x) - \alpha| \leqslant e^{-1} |x - \alpha|$$

(d) Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite d'éléments de $[1; +\infty[$ définie par la condition initiale $\alpha_0 = 1$ et par la relation de récurrence

$$\alpha_{n+1} = \varphi(\alpha_n)$$

Montrer que pour tout nombre entier naturel n :

$$|\alpha_n - \alpha| \leqslant e^{-(n+1)}$$

(e) En déterminant au préalable le nombre d'itérations nécessaires, expliciter, à l'aide d'une calculatrice, une valeur décimale approchée $\tilde{\alpha}$ de α telle que :

$$|\tilde{\alpha} - \alpha| \leqslant 10^{-6}$$

Partie II : Étude d'une suite de fonction

Excepté la question 8, la partie II est indépendante de la partie I.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions numériques définies sur $[0; 1]$ par la condition initiale $u_0(x) = 1$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1}(x) = \left[1 - x + \frac{x}{2} u_n(x)\right] u_n(x)$$

1. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, la fonction u_n est polynômiale; déterminer son degré et son coefficient dominant.

2. Montrer par récurrence sur n que, pour tout nombre entier naturel n et pour tout élément x de $[0; 1]$:

$$0 < u_n(x) \leqslant 1$$

En déduire, toujours par récurrence sur n, que, pour tout nombre entier naturel n et pour tout élément x de $[0; 1]$:

$$u_n'(x) \leqslant 0$$

3. (a) Soit x un élément de $[0; 1]$ et n un entier naturel non nul. Établir les inégalités :

$$(1 - x)^n \leqslant u_n(x) \leqslant \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n$$

(b) En déduire que, lorsque x est fixé dans $[0; 1]$, la suite de terme général $u_n(x)$ converge. Exprimer sa limite en fonction de x.

(c) Montrer que cette suite est décroissante.

Dans toute la suite du problème, on note h la fonction définie sur $[0; 1]$ par la relation :

$$h(t) = t\left(1 - \frac{t}{2}\right)$$

4. (a) Montrer que, pour tout couple (a, b) d'éléments de $[0; 1]$:

$$|h(b) - h(a)| \leqslant |b - a|$$

(b) En déduire que, pour tout nombre entier naturel k et pour tout élément x de $[0;1]$:

$$|[u_k(x) - u_{k+1}(x)] - [u_{k+1}(x) - u_{k+2}(x)]| \leqslant x\,|u_k(x) - u_{k+1}(x)|$$

(c) Montrer enfin que, pour tout nombre entier naturel k et pour tout élément x de $[0;1]$:

$$0 \leqslant u_k(x) - u_{k+1}(x) \leqslant \frac{u_{k+1}(x) - u_{k+2}(x)}{1-x}$$

5. Dans cette question, on fixe k dans $\mathbb{N}$ et x dans $[0;1[$.

(a) En utilisant le dernier encadrement et le sens de variation de h, montrer que :

$$x \leqslant \int_{u_{k+1}(x)}^{u_k(x)} \frac{dt}{h(t)} \leqslant \frac{x}{1-x}$$

(b) En déduire que, pour tout nombre entier naturel n :

$$nx \leqslant \int_{u_n(x)}^{1} \frac{dt}{h(t)} \leqslant \frac{nx}{1-x}$$

6. (a) Trouver un couple (A, B) de nombre réels tels que, pour tout élément t de l'intervalle $]0;1]$:

$$\frac{1}{h(t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1 - \frac{t}{2}}$$

(b) En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_{u_n(x)}^{1} \frac{dt}{h(t)}$$

en fonction de $u_n(x)$. En conclure que :

$$\frac{2}{1 + \exp\left(\frac{nx}{1-x}\right)} \leqslant u_n(x) \leqslant \frac{2}{1+e^{nx}}$$

7. Soit y un élément de $\mathbb{R}_+$. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n\left(\frac{y}{n}\right)$.

8. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie sur $[0;1]$ par :

$$v_n(x) = x\,u_n(x)$$

On note M_n le maximum de la fonction v_n sur l'intervalle $[0;1]$.

(a) Montrer que :

$$v_n\left(\frac{\alpha}{n+\alpha}\right) \geqslant \frac{2(\alpha-1)}{n+\alpha}$$

(b) Établir l'encadrement :

$$\frac{2(\alpha-1)}{n+\alpha} \leqslant M_n \leqslant \frac{2(\alpha-1)}{n}$$

En déduire un équivalent simple de M_n lorsque n tend vers $+\infty$