

ECOLE DES HAUTES ETUDES COMMERCIALES  
E.S.C.P.-E.A.P.  
ECOLE SUPERIEURE DE COMMERCE DE LYON

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

---

**OPTION GENERALE**

**MATHEMATIQUES I**

**Année 1992**

---

*La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.*

*Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

*Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

Objectif du problème: on note  $E$  l'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  des fonctions à valeurs réelles, continues sur un intervalle  $[a, b]$  où  $a < b$ . On rappelle qu'une fonction affine sur un intervalle  $J$  est une fonction  $f$  définie sur  $J$  par une relation de la forme  $f(t) = \alpha t + \beta$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des nombres réels.

Étant donné un nombre entier  $n \geq 2$  et une subdivision de  $[a, b]$ , c'est-à-dire une suite strictement croissante  $\sigma_n = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  de  $n + 1$  éléments de  $[a, b]$ , avec  $x_0 = a$  et  $x_n = b$ , on note  $E(\sigma_n)$  l'ensemble des fonctions  $f$  définies sur  $[a, b]$  telles que chacune des restrictions de  $f$  aux intervalles  $[x_k, x_{k+1}]$ , où  $k$  prend les valeurs  $0, 1, \dots, n - 1$ , soit une fonction affine.

L'objet du problème est d'étudier l'approximation d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $[a, b]$  par des éléments de  $E(\sigma_n)$

### **Première partie : Etude de $E(\sigma_2)$**

Dans cette partie, on prend  $n = 2$ , ainsi  $x_0 = a$  et  $x_2 = b$ . On pose  $c = x_1$ .

1. Montrer que  $E(\sigma_2)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2. Soit  $f$  un élément de  $E(\sigma_2)$ . Calculer  $f(t)$  en fonction de  $f(a)$ ,  $f(b)$  et  $f(c)$  pour  $a \leq t \leq c$ , puis pour  $c \leq t \leq b$ .
3. Soit  $\Phi$  l'application de  $E(\sigma_2)$  dans  $\mathbb{R}^3$  définie par  $\Phi(f) = (f(a), f(b), f(c))$ . Montrer que  $\Phi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de  $E(\sigma_2)$ .
4. On définit trois éléments  $f_0$ ,  $f_1$  et  $f_2$  de  $E(\sigma_2)$  par les conditions:

$$\Phi(f_0) = (1, 0, 0) \quad \Phi(f_1) = (0, 1, 0) \quad \Phi(f_2) = (0, 0, 1)$$

- (a) Représenter graphiquement les fonctions  $f_0$ ,  $f_1$  et  $f_2$ .

(b) Montrer que  $(f_0, f_1, f_2)$  est une base de  $E(\sigma_2)$ .

5. On considère les fonctions  $g_0, g_1$  et  $g_2$  définies sur  $[a, b]$  par les relations:

$$g_0(t) = |t - a| \quad g_1(t) = |t - c| \quad g_2(t) = |t - b|$$

(a) Montrer que  $(g_0, g_1, g_2)$  est une base de  $E(\sigma_2)$ . Calculer les coordonnées de chacune des fonctions  $g_0, g_1$  et  $g_2$  dans la base  $(f_0, f_1, f_2)$ .

(b) Soient  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  des nombres réels non nuls. On pose:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ \alpha & 0 & \gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que la matrice  $A$  est inversible et calculer son inverse.

(c) En déduire les coordonnées de chacune des fonctions  $f_0, f_1$  et  $f_2$  dans la base  $(g_0, g_1, g_2)$ .

## Deuxième partie : Etude de $E(\sigma_n)$

Dans cette partie on prend  $a = 0, b = 1$  et  $x_k = \frac{k}{n}$  pour tout nombre entier naturel  $k \leq n$ . L'espace vectoriel  $E(\sigma_n)$  sera noté plus simplement  $E_n$ .

1. Prouver que  $E_n$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $E$  des fonctions continues sur  $[0, 1]$ .
2. Soit  $\Phi$  l'application de  $E_n$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  définie par  $\Phi(f) = (f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_n))$ . Montrer que  $\Phi$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En déduire la dimension de  $E_n$ .
3. On définit une famille  $(f_0, f_1, \dots, f_n)$  d'éléments de  $E_n$  par les conditions:

$$\Phi(f_k) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$$

le nombre 1 étant à la  $(k+1)^{\text{ième}}$  place. Autrement dit  $f_k(x_k) = 1$  et  $f_k(x_j) = 0$  pour  $j \neq k$ .

(a) Montrer que  $(f_0, f_1, \dots, f_n)$  est une base de  $E_n$ .

(b) Montrer que, pour tout élément  $g$  de  $E_n$ , on a l'égalité:

$$g = \sum_{k=0}^n g(x_k) f_k$$

4. Pour tout nombre entier naturel  $k \leq n$ , on considère la fonction  $g_k$  définie sur  $[0, 1]$  par la relation :

$$g_k(t) = |t - x_k|$$

(a) Montrer que les fonctions  $g_k$  appartiennent à  $E_n$ .

(b) Soit  $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$  un élément de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . On pose:

$$g = \sum_{k=0}^n \lambda_k g_k$$

Soit  $j$  un nombre entier compris entre 1 et  $n-1$ . Si on suppose que  $\lambda_j \neq 0$ , montrer que la fonction  $g$  n'est pas dérivable en  $x_j$ .

5. (a) En déduire que la famille  $(g_0, g_1, \dots, g_n)$  est libre. Est-ce une base de  $E_n$ ?

(b) En déduire aussi que  $f_0, f_1, \dots, f_n$  peuvent s'écrire sous la forme:

$$\begin{cases} f_0 = \lambda_0 g_0 + \mu_0 g_1 + \nu_0 g_n \\ f_k = \lambda_k g_{k-1} + \mu_k g_k + \nu_k g_{k+1} & \text{si } 1 \leq k \leq n-1 \\ f_n = \lambda_n g_0 + \mu_n g_{n-1} + \nu_n g_n \end{cases}$$

Pour les entiers  $k$  compris entre 1 et  $n-1$ , on commencera par montrer que  $f_k$  est de la forme

$$f_k = \alpha_k g_0 + \lambda_k g_{k-1} + \mu_k g_k + \nu_k g_{k+1} + \beta_k g_n$$

puis que  $\alpha_k = \beta_k = 0$  en considérant les restrictions de  $f_k$  aux deux intervalles  $[x_0, x_1]$  et  $[x_{n-1}, x_n]$ .

(c) Calculer, à l'aide des résultats de la première partie, les nombres  $\lambda_k, \mu_k$  et  $\nu_k$ .

6. **Application.** On considère la matrice carrée  $A_n$  d'ordre  $n+1$  dont l'élément de la  $i^{\text{ième}}$  ligne et de la  $j^{\text{ième}}$  colonne est  $|i-j|$ . Ainsi:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & n-2 & n-1 \\ 2 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 2 \\ n-1 & n-2 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & \cdots & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer les coordonnées de  $g_k$  dans la base  $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ . Interpréter la matrice:

$$P_n = \frac{1}{n} A_n$$

(b) Prouver que la matrice  $A_n$  est inversible et calculer son inverse.

## Troisième partie

Dans cette partie, on approche une fonction de classe  $C^2$  sur  $[0, 1]$  par des éléments de  $E_n$ .

1. On considère une fonction de classe  $C^2$  sur un intervalle  $[a, b]$ , où  $a < b$ , telle que  $f(a) = f(b)$ . Soit  $c$  un élément de  $]a, b[$  et  $\sigma_2 = (a, b, c)$ .

(a) Soit  $\varphi$  un élément de  $E(\sigma_2)$  tel que  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ . Établir l'égalité:

$$\int_a^b \varphi(t) f''(t) dt = (f(c) - f(a)) (\varphi'(b) - \varphi'(a))$$

(b) Déterminer un élément  $\varphi_c$  de  $E(\sigma_2)$  tel que, quelle que soit  $f$ :

$$\int_a^b \varphi_c(t) f''(t) dt = f(c) - f(a)$$