ESG 1983 Option générale Math I

Problème 1 :

Dans ce problème, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n, B et C sont respectivement les bases canoniques de $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$ (n est considéré égal à 2 sauf en I.1))

I. Si s est un réel, on définit l'application : $\varphi_s : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}^{n+1}$ par

$$\varphi_s(P) = \left(\widetilde{P}(s), \frac{\widetilde{P}'(s)}{1!}, \frac{\widetilde{P}"(s)}{2!}, \dots, \frac{\widetilde{P}^{(n)}(s)}{n!}\right),$$

où $\widetilde{P}^{(i)}(s)$ désigne la valeur en s de la fonction polynômiale dérivée $i^{ième}$ de P.

(1) Montrer que φ_s est une application linéaire.
On suppose désormais que $n = 2$.

(2) Montrer que $A_s = \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 \\ 0 & 1 & 2s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ représente φ_s dans les bases B et C.
En déduire que φ_s est bijective quel que soit le réel s.

(3) On désigne par $\psi_{s,t}$ l'application linéaire : $\varphi_s - \varphi_t$ (s et t sont deux réels distincts).
  a. Déterminer la matrice $B_{s,t}$ associée à $\psi_{s,t}$ dans les bases B et C.
  b. Préciser le rang de $\psi_{s,t}$. En déduire la dimension du noyau de $\psi_{s,t}$.
  c. Déterminer l'ensemble des polynômes P de degré inférieur ou égal à 2, tels que $\varphi_s(P) = \varphi_t(P)$ avec $s \neq t$.

II. (On suppose encore que $n = 2$).

(1) Calculer $A_s.A_t$ où s et t sont des réels.
En déduire que $\{A_s\}_{s\in\mathbb{R}} = A$ est un sous-groupe abélien des matrices inversibles de dimension 3.

(2) En déduire le polynôme P de degré inférieur ou égal à 2, tel que $\widetilde{P}(1) = \widetilde{P}'(1) = 1$

(3) a. Montrer que A est inclus dans l'espace vectoriel E des matrices engendré par I, $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et M^2.
  b. Montrer que cette famille est une base de E.
  A est-il un sous-espace vectoriel de E ? Comparer l'espace vectoriel engendré par A et E.

(4) a. Montrer que E est une algèbre commutative de matrices.
  b. Exprimer en fonction de I, M, M^2 le produit

$$(aI + bM + cM^2)(xI + yM + zM^2),$$

  déterminer les éléments inversibles de E.

(5) Montrer que l'ensemble des matrices qui commutent avec les éléments de A est l'espace vectoriel E.
Si N est un élément de E, on lui associe $\sigma(N)$ le réel égal à la somme des trois termes de la troisième colonne de N, c'est-à-dire

$$\text{si } N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \alpha & 2\beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \qquad \sigma(N) = (\alpha + 2\beta + \gamma).$$

a. Montrer que σ est une forme linéaire sur E. Préciser la dimension de $\ker(\sigma)$.
b. Montrer que $\ker(\sigma) \cap A$ se réduit à un seul élément que l'on précisera.

Problème 2 :

I. Un jeu réunit 2 joueurs A et B. A chaque manche, le joueur A (resp. B) a une probabilité p (resp. q) de remporter la manche. On supposera que $p+q=1$ et que les résultats obtenus par un joueur au cours de manches différentes sont indépendants. Le jeu s'arrête dès qu'un joueur remporte deux manches de suite (ce joueur est alors déclaré vainqueur).

(1) Quelle est la probabilité pour que le jeu s'achève sur la victoire de A au bout de k manches ($k \geqslant 2$) ?
(2) Quelle est la probabilité pour que le jeu s'achève en moins (strict) de k manches sur la victoire de A ($k \geqslant 3$) ?
(3) Quelle est la probabilité pour que le jeu s'achève en moins (strict) de k manches ?

II. Soit U le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles et (a,b,c) un élément de $(\mathbb{R}^{\times})^3$. On admettra que l'ensemble des suites $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation

$$(S) : \forall n \geqslant 1, \quad aU_{n+2} + bU_{n+1} + cU_n = 0$$

constitue un sous-espace vectoriel de dimension 2 de U.

(1) On suppose que $b^2 - 4ac > 0$.
Montrer qu'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que le terme général U_n de toute suite réelle vérifiant (S) s'écrive :

$$U_n = \alpha(\lambda_1)^n + \beta(\lambda_2)^n, \quad n \geqslant 1$$

(Pour cela, on trouvera l'ensemble des suites réelles de terme général $U_n = \lambda^n$ vérifiant la relation (S) et on utilisera le résultat admis précédemment). Calculer α et β en fonction de U_1 et U_2.

(2) Trois joueurs A,B,C s'affrontent dans un jeu à trois. A chaque manche, le joueur A (resp. C) a une probabilité p (resp. q) d'enlever la manche. Le joueur B a lui aussi une probabilité p d'enlever une manche donnée. On supposera que $2p+q=1$ et que les résultats obtenus par un joueur au cours des manches différentes sont indépendants. Le jeu s'achève dès qu'un joueur enlève deux manches successives (ce joueur est alors déclaré vainqueur).
On désigne par $p_n(A)$ ($n \geqslant 1$) la probabilité de l'évènement suivant :
"le joueur A emporte la $n^{ième}$ manche et le jeu continue "
(autrement dit aucun joueur n'a encore enlevé 2 manches de suite et la $n^{ième}$ manche est remportée par A). On définit de la même manière $p_n(B)$ et $p_n(C)$ pour $n \geqslant 1$.

a. Calculer $p_n(A)$ en fonction de $p_{n-1}(B)$ et $p_{n-1}(C)$.
b. Calculer $p_n(C)$ en fonction de $p_{n-1}(A)$ et $p_{n-1}(B)$.
c. Justifier l'égalité $p_n(A) = p_n(B)$ $n \geqslant 1$.
d. Déduire de ce qui précède une relation de la forme

$$ap_n(A) + bp_{n-1}(A) + cp_{n-2}(A) = 0 \quad (n \geqslant 2)$$

e. Calculer directement $p_1(A)$ et $p_2(A)$.
En déduire la valeur de $p_n(A)$ ($n \geqslant 1$).
f. Calculer $p_n(B)$ et $p_n(C)$. En déduire la probabilité P_n de l'évènement "le jeu n'est toujours pas fini à la $n^{ième}$ manche".
Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.
g. Calculer les probabilités des 2 évènements suivants :
"le jeu s'achève après n manches sur la victoire de A" et
"le jeu s'achève après n manches sur la victoire de C"
h. Application numérique $p = \dfrac{8}{19}, \quad q = \dfrac{3}{19}$