ESG 1986 Option générale Math I

Algèbre

Problème I

1. Montrer que le polynôme à coefficients réels

$$P(x) = x^4 - 9x^3 + 30x^2 - 44x + 24$$

a une racine multiple d'ordre 3, que l'on précisera.
Décomposer $P(x)$ en produit de polynômes du premier degré.

2. On désigne par E un espace vectoriel de dimension 4 par : $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est une base de E. Soit u l'endomorphisme de E défini par :

$$\begin{aligned} u(e_1) &= -2e_2 + 2e_3 - 5e_4 \\ u(e_2) &= -3e_1 + 2e_3 - 6e_4 \\ u(e_3) &= -e_1 + 3e_3 - e_4 \\ u(e_4) &= e_1 + 2e_2 - e_3 + 6e_4 \end{aligned}$$

On désigne par Id_E l'application identique de E dans E. Montrer que le sous-espace vectoriel F de E engendré par les vecteurs :

$$\{a_1 = e_1 - e_2, \quad a_2 = e_2 + e_4, \quad a_3 = e_3\}$$

est stable pour l'endomorphisme $v = 2\,\mathrm{Id}_E - u$ (c'est-à-dire que $v(F) \subset F$).
On appelle ω la restriction de v à F. Vérifier que $\omega^2 \neq 0$ et que $\omega^3 = 0$.
Montrer que le vecteur $f_1 = 2e_1 - e_2 - e_3 + e_4$ appartient à F.
On pose $f_2 = -\omega(f_1), \quad f_3 = -\omega(f_2)$.
Les vecteurs $\{f_1, f_2, f_3\}$ sont-ils linéairement indépendants ?

3. (a) Déterminer les nombres réels a, b et c pour que le vecteur $f_4 = e_1 + ae_2 + be_3 + ce_4$ appartienne au noyau de l'endomorphisme : $s = 3\,\mathrm{Id}_E - u$.
   (b) Montrer que les vecteurs $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ forment une base de E.
   Quelle est la matrice B de l'endomorphisme u dans cette base ? (On remarquera que $s(f_4) = 0$)
   (c) Quelles sont les matrices de passage entre les bases $\{e_i\}$ et $\{f_j\}$?

4. (a) Si r est un nombre réel, montrer que l'endomorphisme $u_r = r\,\mathrm{Id}_E - u$ est inversible si et seulement si, $P(r) \neq 0$.
   (b) Déterminer le rang de u_r en fonction de r.

5. Montrer que les matrices réelles suivantes :

$$C = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

commutent.
Calculer B^n avec $n \in \mathbb{N}$.

Problème II

1. Soit $a \in \mathbb{C}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(z+1)^n = \cos na + i \sin na$$

Représenter graphiquement l'image de ses racines.

2. Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $\sin(\frac{x}{2}) \neq 0$, calculer la somme suivante

$$S_n = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos(n-1)x$$

en faisant apparaitre S_n comme la partie réelle d'une série géométrique de nombres complexes.

Analyse

Problème I

On désigne par $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, des fonctions numériques, définies et continues sur $\mathbb{R}$ et l'on considère l'application de $\mathcal{C} \to \mathcal{C}$, qui à la fonction f, fait correspondre la fonction g définie par :

$$g(x) = \int_0^x t f(t) dt \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

On appelle la fonction g ainsi obtenue la transformée de f

1. (a) Montrer que la transformée g de toute fonction f de $\mathcal{C}$ est une fonction dérivable en tout point et qu'elle admet à l'origine une dérivée seconde que l'on calculera.

   (b) Montrer que l'application de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ ainsi définie est une application linéaire.
   Déterminer son noyau.
   Est-elle injective ? Surjective ?

   (c) Montrer que si f est une fonction paire ou impaire, sa transformée g possède la même propriété.
   Déterminer la transformée de la fonction h définie par :

$$h(x) = f(kx)$$

   en fonction de celle de f, k étant une constante réelle.

2. (a) Calculer les transformées des fonctions

$$\begin{array}{rcl} x & \mapsto & x \arctan x \\ x & \mapsto & \dfrac{4}{(e^x + e^{-x})^2} \end{array}$$

   (b) Soit I_n la transformée de la fonction $x \mapsto x^n \sin x$.
   Etablir une relation de récurrence permettant de calculer I_n à partir de I_0 et de I_1, pour tout entier n.

3. (a) Soit z la transformée de la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$.
   Montrer que z admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de l'origine, sans expliciter z.
   Le calculer pour $n = 7$.

   (b) Calculer, à l'aide d'un changement de variable, la transformée y, de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2+2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.
   Construire, relativement à un repère orthonormé du plan affine, le graphe de la fonction y en étudiant avec soin les branches infinies, la concavité et les tangentes aux points d'inflexion.

4. Soit h une fonction numérique possédant une dérivée continue dans $\mathbb{R}$.
   La fonction h étant fixée, on se propose de déterminer les fonctions f de $\mathcal{C}$ vérifiant l'équation :

$$(1) \qquad f(x) - \int_0^x tf(t)dt = h(x)$$

   (a) Montrer que si f vérifie (1) alors elle est solution de l'équation :

$$f'(x) - xf(x) = h'(x) \text{ avec } f(0) = h(0)$$

   (b) Prouver que

$$f(x) = h(x) + \exp(\frac{x^2}{2}) \int_0^x h(t)t \exp(-\frac{t^2}{2})dt.$$

   Faire le calcul avec $h(x) = x^2(x^2+1)$.

Problème II

Soit $f(x) = x^{\left(x^{1/x}\right)}$

1. Montrer que $f'(x) \sim \dfrac{f(x)}{x}$ quand $x \to +\infty$
2. On pose $h(x) = f(x+1) - f(x)$; calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$